Cartea Școlară în Mileniul III

Coordonatori:
DAN SECLĂMAN DĂNUȚ DRĂCEA CRISTIAN MOANȚĂ

Autori:
CĂTĂLIN CRISTEA GIGEL BUTH CORINA IONESCU
CĂTĂLIN SPIRIDON DAN POPESCU RALUCA CIURCEA
DANIELA DÎRNU FLORENTIN NICOLAE DANIEL CIURCEA
OTILIA DRĂGAN TEODORA RĂDULESCU DANIEL ION
ADRIAN PICIU ORLANDO ALECU CĂTĂLIN PANĂ
MARIAN VOINEA AUREL CHIRIȚĂ SORIN DUMITRESCU
ELENA NEACĂ DOINA FIRICEL GABRIEL TICA
SIMONA RADU MIHAELA NASCU MIHAELA BADEA

BACALAUREAT 2018
MATEMATICĂ

BREVIAR TEORETIC - CLASELE IX-XII
TESTE DE EVALUARE - CLASELE IX-XII
TESTE FINALE - CLASELE IX-XII
TESTE SIMULARE BACALAUREAT - CLASA A XI-A
65 DE TESTE PROPUSE PENTRU BACALAUREAT
VARIANTE OFICIALE BACALAUREAT - 2015/2017
BAREM DE REZOLVARE A TESTELOR

EDITURA CARDINAL

Coordonatori:
DAN SECLĂMAN DĂNUȚ DRĂCEA CRISTIAN MOANȚĂ

Autori:
CĂTĂLIN CRISTEA GIGEL BUTH CORINA IONESCU
CĂTĂLIN SPIRIDON DAN POPESCU RALUCA CIURCEA
DANIELA DÎRNU FLORENTIN NICOLAE DANIEL CIURCEA
OTILIA DRĂGAN TEODORA RĂDULESCU DANIEL ION
ADRIAN PICIU ORLANDO ALECU CĂTĂLIN PANĂ
MARIAN VOINEA AUREL CHIRIȚĂ SORIN DUMITRESCU
ELENA NEACĂ DOINA FIRICEL GABRIEL TICA
SIMONA RADU MIHAELA NASCU MIHAELA BADEA

BACALAUREAT 2018
MATEMATICĂ

BREVIAR TEORETIC - CLASELE IX-XII

TESTE DE EVALUARE - CLASELE IX-XII

TESTE FINALE - CLASELE IX-XII

TESTE SIMULARE BACALAUREAT - CLASA A XI-A

65 DE TESTE PROPUSE PENTRU BACALAUREAT

TESTE OFICIALE BACALAUREAT - 2015/2017

BAREM DE REZOLVARE A TESTELOR

Editura Cardinal 2017

La realizarea lucrării au contribuit:

Dan Seclăman - Lic. T. *Tudor Arghezi*, Craiova
Dănuț Drăcea - C.N. *Carol I*, Craiova
Cristian Moanță - C.N. *Frații Buzești*, Craiova
Cătălin Cristea - C.N. *Ștefan Velovan*, Craiova
Gigel Buth - C.N. *Doamna Stanca*, Satu-Mare
Corina Ionescu - Grup Șc. *Charles Laugier*, Craiova
Cătălin Spiridon - C.N. *Carol I*, Craiova
Dan Popescu - C.N. *Ștefan cel Mare*, Suceava
Daniela Dîrnu - C. Tehnic Energetic, Craiova
Florentin Nicolae - Lic. Teh. *D. Filișanu*, Filiași
Sorin Dumitrescu - Lic. C.F.R., Craiova
Doina Firicel - Lic. T. *Independența*, Calafat
Simona Radu - C.N. *Gh. Chițu*, Craiova
Mihaela Badea - C.N. *Gh. Chițu*, Craiova
Raluca Ciurcea - C.N. *Carol I*, Craiova
Daniel Ciurcea - Lic. Teh. *D. Filișanu*, Filiași
Otilia Drăgan - Lic. T. *Henri Coandă*, Craiova
Teodora Rădulescu - C.N. *Frații Buzești*, Craiova
Daniel Ion - Lic. *Ștefan Odobleja*, Craiova
Adrian Piciu - Lic. T. *Tudor Arghezi*, Craiova
Orlando Alecu - C.N. *Anastasescu*, Roșiori de Vede
Cătălin Pană - C.N. *Mircea cel Bătrân*, Rm. Vâlcea
Marian Voinea - C.N. *Mihai Eminescu*, București
Aurel Chiriță - C.N. *Ion Minulescu*, Slatina
Elena Neacă - Grup Ind. de Const. *Bibescu*, Craiova
Gabriel Tica - Lic. T. *Mihai Viteazul*, Băilești
Mihaela Nascu - C.N. *Gh. Chițu*, Craiova

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Bacalaureat 2018 - Matematică : breviar teoretic pentru clasele IX-XII, teste de evaluare și teste finale pentru clasele IX-XII, teste pentru simulare : 65 de teste propuse pentru Bacalaureat, barem de rezolvare a testelor / coord.: Dan Seclăman, Dănuț Drăcea, Cristian Moanță. - Craiova : Cardinal, 2017
ISBN 978-973-9352-55-0

I. Seclăman, Dan (coord.)
II. Drăcea, Dănuț (coord.)
III. Moanță, Cristian (coord.)

51

Copyright © 2017 Cardinal
Toate drepturile asupra acestei cărți aparțin Editurii Cardinal

Reproducerea integrală sau parțială a textului din această carte este interzisă fără acordul prealabil scris al Editurii Cardinal

Editura CARDINAL, Craiova
Tel./Fax: 0351.422425
e-mail: edit_cardinal@yahoo.com

Coperta: **Irina Liliana Suciu**
Tehnoredactare: **Irina Liliana Suciu**

Comenzi: Tel./Fax: 0351.422425; 0744.555376.

CNI CORESI
Tipărit la C.N.I. „CORESI" S.A.
SUCURSALA IMPRIMERIA „ARDEALUL" CLUJ
Sub comanda nr. 170107/2017

Prefață

Materialul propus se constituie într-un ghid metodologic în conformitate cu prevederile legale în vigoare în scopul înbunătățirii calității procesului de învățământ.

Această lucrare se adresează tuturor elevilor care vor susține Examenul de Bacalaureat începând cu anul 2018. În egală măsură lucrarea poate fi utilizată de toți elevii claselor IX-XII în activitatea de zi cu zi la clasă.

Structurată, pe clase și capitole, lucrarea respectă prevederile programelor școlare în vigoare la nivelul fiecărei clase, precum și programa în vigoare a examenului de bacalaureat pentru profilele:

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profil militar MAPN, specializarea matematică-informatică.
Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică, toate calificările profesionale.

- *Recomandăm tuturor elevilor să parcurgă în primă etapă breviarul teoretic al fiecărui capitol, al clasei pe care o studiază.*
  În breviarul teoretic sunt prezentate noțiunile strict necesare parcurgerii cu succes a testelor de evaluare, cât și cele finale propuse la sfârșitul fiecărei clase.

- *Fiecare capitol al fiecăreia dintre clasele IX-XII, are propus un număr important de probleme sub forma de Teste de Evaluare.*
  Acestea acoperă întreaga materie și au ca scop crearea unei baze de antrenament în vederea susținerii viitorului examen de bacalaureat.
  Testele de evaluare propuse au cu scop, pe de o parte, fixarea fiecărei noțiuni teoretice, cât și, pe de altă parte, crearea obișnuinței de a rezolva probleme propuse după modelul bacalaureatului începând chiar din clasa a IX-a.
  Fiecare clasă se încheie cu propunerea de Teste Finale care reprezintă o recapitulare a materiei clasei respective.
  Recomandăm folosirea testelor finale și în pregătirea lucrărilor scrise semestriale.

- *Elevii claselor a XI-a beneficiază și de Teste pentru Simularea Examenului de Bacalaureat, putând astfel să conștientizeze nivelul pregătirii personale.*

- *Având un colectiv valoros de autori, lucrarea reușește, prin cele 65 de Teste Propuse pentru Bacalaureat, să acopere toate tipurile de variante de lucru necesare pregătirii cu succes a examenului la obiectul matematică.*
  Aceste teste pot fi folosite de elevii de la toate profilele.

- *Deasemenea sunt incluse subiectele oficiale ale Examenului de Bacalaureat, pentru toate profilele, din perioada 2015-2017, sesiunile Iunie-August, precum și subiectele date la Sesiunile Speciale din această perioadă.*

- *Lucrarea se încheie cu soluții și indicații la testele de evaluare propuse. Cele 65 de Teste pentru Bacalaureat beneficiază fiecare de Barem de rezolvare după modelul celor folosite în corectarea lucrărilor la examenul de Bacalaureat.*

Coordonatorii lucrării.

Cuprins

Clasa a IX-a

CAP. I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

- BREVIAR TEORETIC 7
- *Teste de evaluare* 8

CAP. II. ȘIRURI DE NUMERE REALE. PROGRESII

- BREVIAR TEORETIC 9
- *Teste de evaluare* 10

CAP. III. FUNCȚII

- BREVIAR TEORETIC 11
- *Teste de evaluare* 13

CAP. IV. VECTORI

- BREVIAR TEORETIC 14
- *Teste de evaluare* 14

CAP. V. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

- BREVIAR TEORETIC 16
- *Teste de evaluare* 17

CAP. VI. APLICAȚIILE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

- BREVIAR TEORETIC 18
- *Teste de evaluare* 18

TESTE FINALE 20

Clasa a X-a

CAP. I. NUMERE REALE: PUTERI, RADICALI, LOGARITMI

- BREVIAR TEORETIC 24
- *Teste de evaluare* 25

CAP. II. NUMERE COMPLEXE

- BREVIAR TEORETIC 26
- *Teste de evaluare* 27

CAP. III. PROBLEME DE NUMĂRARE. BINOMUL LUI NEWTON. PROBABILITĂȚI

- BREVIAR TEORETIC 28
- *Teste de evaluare* 29

CAP. IV. FUNCȚII. ECUAȚII

- BREVIAR TEORETIC 30
- *Teste de evaluare* 31

CAP. V. ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ

- BREVIAR TEORETIC 32
- *Teste de evaluare* 33

TESTE FINALE 35

Clasa a XI-a * Algebră *

CAP. I. PERMUTĂRI
- BREVIAR TEORETIC 39
- *Teste de evaluare* 39

CAP. II. MATRICE
- BREVIAR TEORETIC 41
- *Teste de evaluare* 42

CAP. III. DETERMINANȚI
- BREVIAR TEORETIC 43
- *Teste de evaluare* 43

CAP. IV. MATRICE INVERSABILE
- BREVIAR TEORETIC 45
- *Teste de evaluare* 45

CAP. V. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE
- BREVIAR TEORETIC 46
- *Teste de evaluare* 47

Clasa a XI-a * Analiză *

CAP. I. LIMITE DE ȘIRURI
- BREVIAR TEORETIC 49
- *Teste de evaluare* 50

CAP. II. LIMITE DE FUNCȚII
- BREVIAR TEORETIC 51
- *Teste de evaluare* 52

CAP. III. FUNCȚII CONTINUE
- BREVIAR TEORETIC 54
- *Teste de evaluare* 54

CAP. IV. FUNCȚII DERIVABILE
- BREVIAR TEORETIC 56
- *Teste de evaluare* 56

CAP. V. TEOREMELE FERMAT, ROLLE, LAGRANGE, L'HOSPITAL
- BREVIAR TEORETIC 58
- *Teste de evaluare* 59

CAP. VI. ROLUL DERIVATELOR ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR
- BREVIAR TEORETIC 60
- *Teste de evaluare* 60

TESTE DE SIMULARE BACALAUREAT 62

TESTE FINALE 68

Clasa a XII-a * Algebră *

CAP. I. STRUCTURI ALGEBRICE
- BREVIAR TEORETIC 71
- *Teste de evaluare* 73

CAP. II. POLINOAME
- BREVIAR TEORETIC 76
- *Teste de evaluare* 77

Clasa a XII-a * Analiză *

CAP. I. PRIMITIVE

- BREVIAR TEORETIC 80
- *Teste de evaluare* 80

CAP. II. INTEGRALA DEFINITĂ

- BREVIAR TEORETIC 82
- *Teste de evaluare* 83

CAP. III. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

- BREVIAR TEORETIC 84
- *Teste de evaluare* 84

TESTE FINALE 86

TESTE PENTRU BACALAUREAT 89

VARIANTE OFICIALE BACALAUREAT 154

SOLUȚII TESTE DE EVALUARE 175

BAREM DE REZOLVARE TESTE BACALAUREAT 189

Bibliografie

1. Dănuț Drăcea, Liliana Niculescu, Ion Pătrașcu, Dan Seclăman - *Manual matematică pentru clasa a XI-a M1*, Editura *Cardinal*, 2006.

2. Dănuț Drăcea, Liliana Niculescu, Ion Pătrașcu, Dan Seclăman - *Manual matematică pentru clasa a XI-a M2*, Editura *Cardinal*, 2006.

3. Dănuț Drăcea, Liliana Niculescu, Ion Pătrașcu, Dan Seclăman - *Manual matematică pentru clasa a XII-a M1*, Editura *Cardinal*, 2007.

4. Dănuț Drăcea, Liliana Niculescu, Ion Pătrașcu, Dan Seclăman, Lucian Tuțescu - *Manual matematică pentru clasa a XII-a M2*, Editura *Cardinal*, 2007.

5. Dănuț Drăcea, Liliana Niculescu, Ion Pătrașcu, Dan Seclăman, Mihaela Moțățeanu - *Exerciții și probleme de matematică pentru clasa a X-a*, Editura *Cardinal*, 2004.

6. Liliana Niculescu, Ion Pătrașcu, Dan Seclăman, Monalisa Găleteanu - *Exerciții și probleme de matematică pentru clasa a IX-a*, Editura *Cardinal*, 2003.

7. Dan Seclăman - *Probleme de analiză matematică pentru liceu*, Editura *Cardinal*, 1997.

8. Dan Seclăman, Dănuț Drăcea - *1000 de probleme de matematică clasele IX-XII*, Editura *Oltenia* și Editura *Cardinal*, 1993.

9. Dănuț Drăcea, Ion Pătrașcu, Dan Seclăman - *Bacalaureat matematică - teme și teste*, Editura *Cardinal*, 2006.

10. *Colecția revistei de matematică Cardinal*, Editura *Cardinal*, 1990-2017.

*

* *

CLASA A IX-A

Cap. I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

BREVIAR TEORETIC

1. ***Formule de calcul prescurtat***

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$;

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$; $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$;

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$; $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

2. ***Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real***

Definiție: Fie $x \in \mathbf{R}$. Se numește *parte întreagă* a numărului real x, cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal decât x. Se notează $[x]$.

Numărul real $\{x\} = x-[x]$ se numește *partea fracționară* a lui x.

Exemple: *i*) Fie $x = 2,79$. Cum $2 < x < 3$, deducem că $[x] = 2$ și $\{x\} = x-[x] = 0,79$.

ii) Fie $y = -2,79$. Cum $-3 < y < -2$, deducem că $[x] = -3$ și $\{x\} = x-[x] = 0,21$.

Proprietăți:

- $[x] \le x < [x]+1, (\forall) x \in \mathbf{R}$;
- $[x] = x, (\forall) x \in \mathbf{Z}$;
- $[x+k] = [x]+k, (\forall) k \in \mathbf{Z}, (\forall) x \in \mathbf{R}$;
- $0 \le \{x\} < 1, (\forall) x \in \mathbf{R}$;
- $\{x+n\} = \{x\}, (\forall) x \in \mathbf{R}, (\forall) n \in \mathbf{N}$.

3. ***Modulul sau valoarea absolută a unui număr real***

Fie $x \in \mathbf{R}$. *Modulul* sau *valoarea absolută* a lui x se definește astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} = \max(-x, x).$$

Proprietăți:

- $|x| \ge 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = \max(-x, x), (\forall) x \in \mathbf{R}$;
- $|x| = |-x|, (\forall) x \in \mathbf{R}$;
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$;
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, (\forall) x, y \in \mathbf{R}, y \ne 0$;
- $|x+y| \le |x|+|y|, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$;
- $\sqrt{x^2} = |x|, (\forall) x \in \mathbf{R}$;
- $|x| \le a, a > 0 \Leftrightarrow -a \le x \le a$;
- $|x| \ge a, a > 0 \Leftrightarrow x \ge a$ sau $x \le -a$.
- $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$, $a > 0$.
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$.

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. (timp de lucru: 50 min.) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

20p **1.** Dacă $x = 0,3(8)$ și $y = 1,8$, calculați:
a) $x+y$; b) $[x+y]$; c) $[x]+[y]$; d) $\{x+y\}$.

10p **2.** Determinați intervalul pe care expresia $E(x) = |2x-5| + 2x, x \in \mathbf{R}$ este constantă.

20p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuațiile:
a) $|2x-3| = 4$; b) $|x^2 - 2x| = 3$.

20p **4.** a) Dați exemple de $a, b \in \mathbf{Q}$ astfel încât $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$;
b) Dați exemple de $a, b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ astfel încât $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$.

20p **5.** Demonstrați că:
a) $-x^2 - 25 \le 10x, (\forall) x \in \mathbf{R}$; b) $x^2 + 1 \ge \frac{(x+1)^2}{2}, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

Test de evaluare 2. (timp de lucru: 120 min.) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

1.

10p a) Demonstrați că numărul $(2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$ este natural.

10p b) Comparați numerele: $a = (\sqrt{5}+2)^2$ și $b = 6\sqrt{5}$.

10p c) Calculați: $\frac{\sqrt{4}+\sqrt{5}}{\sqrt{20}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{30}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$.

10p **2.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuațiile:

a) $[2x-5] = 3$; b) $|x^2 - 3x + 2| + |12 - 6x| = 0$; c) $|2x-5| = |2x+1|$.

10p **3.** Arătați că: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2, (\forall) a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

4.

10p a) Verificați că: $\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}, (\forall) x > 0$.

10p b) Calculați suma: $S = \frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot 2^2} + \frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2} + \ldots + \frac{4035}{2017^2\cdot 2018^2}$.

10p **5.** Calculați: $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

10p **6.** Arătați că: $(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2 = 6$.

Cap. II. ŞIRURI DE NUMERE REALE. PROGRESII

BREVIAR TEORETIC

1. *Şiruri*

Definiţie: Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *monoton (strict) crescător* dacă

$$x_n \leq x_{n+1} (x_n < x_{n+1}), (\forall) n \geq 1.$$

Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *monoton (strict) descrescător* dacă

$$x_n \geq x_{n+1} (x_n > x_{n+1}), (\forall) n \geq 1.$$

Definiţie: Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *mărginit inferior* dacă există un număr real m astfel încât $m \leq x_n, (\forall) n \geq 1$.

Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *mărginit superior* dacă există un număr real M astfel încât $x_n \leq M, (\forall) n \geq 1$.

Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *mărginit* dacă este mărginit atât inferior cât şi superior.

2. *Progresii aritmetice*

Definiţie: Un şir de numere reale în care orice termen, începând cu al doilea, se obţine din termenul precedent adunat cu acelaşi număr se numeşte *progresie aritmetică.*

Deci, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică dacă $a_{n+1} = a_n + r, (\forall) n \geq 1$, unde $r \in \mathbf{R}$ se numeşte raţia progresiei.

Proprietăţi:

- $a_n = a_1 + (n-1)r, (\forall) n \geq 1.$
- $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, (\forall) n \geq 2.$
- $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, (\forall) n \geq 1.$

3. *Progresii geometrice*

Definiţie: Un şir de numere reale cu primul termen nenul, în care orice termen, începând cu al doilea, se obţine din termenul precedent prin înmulţirea cu acelaşi număr nenul, se numeşte *progresie geometrică.*

Deci, şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică dacă $b_{n+1} = b_n \cdot q, (\forall) n \geq 1$, unde $q \in \mathbf{R}^*$ este raţia progresiei.

Proprietăţi:

- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, (\forall) n \geq 1.$
- $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, (\forall) n \geq 2.$
- $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \begin{cases} \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}.$

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. (timp de lucru: 50 min.) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ avem $a_1 = 3$ și $a_2 = 8$. Calculați suma primilor 20 de termeni ai progresiei.

20p **2.** Determinați numărul real x știind că numerele $2x-1$, $3x$ și $2x+7$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

20p **3.** Scrieți primii cinci termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ dacă $b_1 = 2$ și $b_2 = 6$.

20p **4.** Determinați numărul real x știind că numerele x, $2x-1$, $4x+6$ sunt trei termeni consecutivi într-o progresie geometrică.

20p **5.** Determinați numărul real x știind că progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $b_1 = x$, $b_2 = 4x$ are suma primilor cinci termeni egală cu 20.

Test de evaluare 2. (timp de lucru: 120 min.) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** Se consideră progresia aritmetică de rație 2 cu $a_3 + a_4 = 8$. Determinați a_{2018}.

10p **2.** Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_2 - b_1 - 4 = 0$ și $b_3 - b_1 - 8 = 0$. Determinați suma primilor 20 de termeni ai progresiei.

10p **3.** Determinați numărul real pozitiv x știind că numerele 4, $x+1$ și $x^2 - 16$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

10p **4.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$. Demonstrați că șirul $b_n = 2^{a_n}$ este o progresie geometrică și determinați rația acestei progresii.

10p **5.** Calculați suma primilor 15 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_2 = 6$.

10p **6.** Calculați suma: $S = 2 + 5 + 8 + \ldots + 122$.

10p **7.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2016$ și rația este $r = 2$.

10p **8.** Determinați numărul real x știind că numerele 7, $3x$ și $x^2 + 2$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

10p **9.** Calculați suma primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $3 = 4$.

Cap. III. FUNCȚII

BREVIAR TEORETIC

Definiție: Fie A și B două mulțimi nevide. Spunem că $f: A \to B$ este o *funcție* dacă fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un element unic $f(x) \in B$.

Imaginea funcției f este mulțimea $\text{Im} f = f(A) = \{y \mid \exists x \in A$, astfel încât $f(x) = y\}$.

Funcții egale

Funcțiile $f: A \to B$ și $g: C \to D$ sunt egale dacă și numai dacă

$$A = C,\ B = D \text{ și } f(x) = g(x), (\forall) x \in A.$$

Monotonia funcțiilor

Definiție: Fie $D \subset \mathbf{R}$ o mulțime nevidă.

Funcția $f: D \to \mathbf{R}$ se numește *monoton (strict) crescătoare* dacă pentru orice $x, y \in D, x < y$, avem $f(x) \le f(y)$ $(f(x) < f(y))$.

Funcția $f: D \to \mathbf{R}$ se numește *monoton (strict) descrescătoare* dacă pentru orice $x, y \in D, x < y$, avem $f(x) \ge f(y)$ $(f(x) > f(y))$.

Observație: Notăm $R_f(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}, (\forall) x, y \in D,\ x \neq y$.

- dacă $R_f(x,y) > 0$, atunci funcția f este strict crescătoare.
- dacă $R_f(x,y) < 0$, atunci funcția f este strict descrescătoare.

Două funcții f și g sunt egale dacă au același domeniu de definiție D, același codomeniu și în plus $f(x) = g(x), (\forall) x \in D$.

Funcții pare, funcții impare

Definiție: Fie $D \subset \mathbf{R}$ o mulțime nevidă, centrată în origine.

Funcția $f: D \to \mathbf{R}$ se numește *funcție pară*, dacă $f(-x) = f(x), (\forall) x \in D$.

Funcția $f: D \to \mathbf{R}$ se numește *funcție impară*, dacă $f(-x) = -f(x), (\forall) x \in D$.

Funcții periodice

Definiție: Fie $D \subset R$ o mulțime nevidă. Funcția $f: D \to R$ se numește *periodică, de perioadă* T, dacă $f(x + T) = f(x)$, pentru orice $x \in D$ cu proprietatea $x \pm T \in D$.

Compunerea funcțiilor

Dacă $f: A \to B$ și $g: B \to C$ atunci există funcția compusă $g \circ f: A \to C$ care verifică legea $(g \circ f)(x) = g(f(x)), (\forall) x \in A$.

Funcția identică

Fie $A \subset \mathbf{R}$, nevidă. Funcția $1_A: A \to A$, $1_A(x) = x, (\forall) x \in A$ se numește funcție identică pe A.

Funcția de gradul întâi

Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$ se numește *funcție de gradul întâi*.

1. Graficul funcției de gradul întâi este o dreaptă.

2. Monotonia:

- dacă $a > 0$, atunci f este strict crescătoare.
- dacă $a < 0$, atunci f este strict descrescătoare.

3. Semnul:

- dacă $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, atunci f are semn contrar lui a.
- dacă $x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$, atunci f are semnul lui a.

Funcția de gradul doi

Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ se numește funcție de gradul al doilea.

1. Graficul funcției de gradul al doilea este o parabolă de vârf $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Dreapta de ecuație $x = -\frac{b}{2a}$ este axă de simetrie pentru parabola asociată graficului.

2. Monotonia

- dacă $a > 0$ atunci f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.
- dacă $a < 0$ atunci f este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și strict descrescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

3. Puncte de extrem

- dacă $a > 0$ atunci funcția admite un minim în punctul de abscisă
$$x = -\frac{b}{2a} \text{ și } f_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$
- dacă $a < 0$ atunci funcția admite un maxim în punctul de abscisă
$$x = -\frac{b}{2a} \text{ și } f_{\max} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

4. Poziția parabolei față de *Ox*.

- Parabola se află deasupra axei Ox, dacă $-\frac{\Delta}{4a} > 0$ și $a > 0$.
  În acest caz $f(x) > 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$.
- Parabola este tangentă axei Ox, dacă $\Delta = 0$. În acest caz pentru $a > 0, f(x) \geq 0$, respectiv pentru $a < 0, f(x) \leq 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$.
- Parabola este sub axa Ox, dacă $-\frac{\Delta}{4a} < 0$ și $a < 0$.
  În acest caz $f(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

5. Semnul

- dacă $\Delta < 0$ atunci funcția păstrează semnul lui a.
- dacă $\Delta = 0$ atunci funcția păstrează semnul lui a și se anulează în punctul $x = -\frac{b}{2a}$.
- dacă $\Delta > 0$ atunci funcția are semnul lui a în afara rădăcinilor și semn contrar lui a între rădăcini.

6. Relațiile lui Viete

Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, atunci sunt verificate relațiile:

- $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$.
- $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Dacă $\Delta \geq 0$, $S \geq 0$ și $P \geq 0$, atunci $x_1, x_2 \geq 0$.
Dacă $\Delta > 0$, $P \geq 0$ și $S \leq 0$, atunci $x_1, x_2 \leq 0$.
Dacă $P < 0$, atunci $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ și au semne diferite.

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. (timp de lucru: 50 min.) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** Fie funcțiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x+3, g(x)=x-1$. Să se determine soluția reală a ecuației $2017f(x)-2019g(x)=1$.

20p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=ax+b, g(x)=bx+a$, unde a și b sunt numere reale. Să se arate că dacă $f(-1)=g(-1)$, atunci $f=g$.

20p **3.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care dreapta $x=2$ este axă de simetrie pentru parabola $y=x^2+mx+4$.

20p **4.** Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-2mx+m^2-1=0$ verifică relația $x_1x_2-(x_1+x_2)+2\geq 0$, pentru orice $m\in\mathbf{R}$.

20p **5.** Se consideră funcția $f: D\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{2x}{(x+2)(2-x)}$.

a) Aflați domeniul maxim de definiție D;

b) Este f pară? Dar impară?

Test de evaluare 2. (timp de lucru: 120 min.) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=3x-1$.

10p a) Reprezentați grafic funcția f.

10p b) Calculați: $(f\circ f)(1)$.

10p c) Rezolvați în $\mathbf{Z}$ inecuația: $(x-2)f(x)\leq -2$.

10p **2.** Fie funcțiile $f,g,h:\mathbf{R}\setminus\{0,3\}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x}, g(x)=\dfrac{1}{x}, h(x)=\dfrac{1}{x-3}$. Determinați a și $b\in\mathbf{R}$, astfel încât $f=ag+bh$.

10p **3.** Determinați $a\in\mathbf{R}$ pentru care parabola $y=x^2-2x+a-1$ și dreapta $y=2x+3$ au două puncte distincte comune.

4. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x-5x^2$.

10p a) Ordonați crescător numerele: $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3}), f(\sqrt{6})$.

10p b) Determinați $a\in\mathbf{R}$ astfel încât punctul $A(a+1,a-3)$ să fie pe graficul funcției f.

5. Fie funcția $f_m(x)=x^2-2(m-1)x+m(m-3), m\in\mathbf{R}$.

10p a) Să se determine m pentru care vârful parabolei se găsește sub axa Ox.

10p b) Să se determine m pentru care parabola asociată funcției f este tangentă axei Ox.

Cap. IV. VECTORI

BREVIAR TEORETIC

1. *Vectori în plan*

Regula triunghiului: În triunghiul ABC avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Regula paralelogramului: În paralelogramul $ABCD$ avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Înmulțirea vectorilor cu scalari: pentru un vector oarecare $\overrightarrow{v}$ din plan și pentru un număr real nenul a, $\overrightarrow{av}$ este un vector cu aceeași direcție ca și $\overrightarrow{v}$, de modul egal cu $|a|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|$ și care are același sens cu $\overrightarrow{v}$ dacă $a>0$ și sens opus lui $\overrightarrow{v}$ dacă $a<0$.

Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, pentru orice punct O din plan are loc relația $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, (**formula medianei**).

Vectorii $\overrightarrow{u}$ și $\overrightarrow{v}$ sunt coliniari dacă există $a\in\mathbf{R}^*$, astfel încât $\overrightarrow{v}=a\overrightarrow{u}$.

2. *Vectori în planul xOy*

Dacă $A(x_A,y_A)$ și $B(x_B,y_B)$ atunci $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\cdot\overrightarrow{i}+(y_B-y_A)\cdot\overrightarrow{j}$.

Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$ este $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Vectorii $\overrightarrow{u}=x_1\overrightarrow{i}+y_1\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v}=x_2\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}$ sunt coliniari (paraleli) dacă $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$.

Vectorii $\overrightarrow{u}=x_1\overrightarrow{i}+y_1\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v}=x_2\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}$ sunt ortogonali (perpendiculari) dacă $x_1x_2+y_1y_2=0$.

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. (timp de lucru: 90 min.) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** Fie paralelogramul $ABCD$ și M mijlocul laturii $[CD]$. Evaluați:
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}$; b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}$; c) $2\cdot\overrightarrow{CM}-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)$.

10p **2.** Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și respectiv N, astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Demonstrați că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

10p **3.** a) Determinați numărul real a, știind că vectorii $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{i}+a\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{i}+(a-2)\overrightarrow{j}$ sunt coliniari.

10p b) În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{u}=-3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v}=5\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$. Calculați lungimea vectorului $5\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$.

10p **4.** Se consideră reperul cartezian xOy și punctele $A(1,-1)$ și $B(3,5)$. Determinați coordonatele punctului C din plan, astfel încât: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

10p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,-1)$, $A(1,2)$ și $B(4,1)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

10p **6.** Se consideră vectorii $\vec{u}=(a+3)\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}+\vec{j}$, $a\in\mathbf{R}$. Determinați valorile lui a, astfel încât $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

10p **7.** Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul medianei AM. Demonstrați că: $\overrightarrow{BN}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Test de evaluare 2. (timp de lucru: 90 min.) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** Fie paralelogramul $ABCD$ de centru O. Evaluați:
a) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}$; b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$; c) $2\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$.

10p **2.** Fie triunghiul ABC și $M\in(BC)$, astfel încât $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$. Demonstrați că:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

3. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O.

10p a) Exprimați vectorul $\overrightarrow{AO}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$.

10p b) Exprimați vectorul $\overrightarrow{AD}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AO}$.

10p c) Dacă $\left|\overrightarrow{AB}\right|=1$, calculați: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$.

10p **4.** Se dă triunghiul ABC și se consideră punctul $D\in(BC)$, astfel încât $BC=3DC$. Fie E mijlocul medianei $[CC']$. Arătați că punctele A, D, E sunt coliniare.

10p **5.** Determinați numărul real m știind că vectorii $\vec{u}=2m\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=(m+1)\vec{i}+5\vec{j}$ sunt coliniari.

10p **6.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$. Calculați lungimea vectorului $5\vec{u}-3\vec{v}$.

10p **7.** Se consideră reperul cartezian xOy și punctele $A(1,1)$ și $B(-3,5)$. Determinați coordonatele punctului C din plan, astfel încât: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

Cap. V. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

BREVIAR TEORETIC

1. ***Formula fundamentală a trigonometriei***

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

2. ***Formule de reducere la primul cadran***

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x, \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\pi - x) = -\cos x, \sin(\pi + x) = -\sin x, \cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(2\pi - x) = -\sin x, \cos(2\pi - x) = \cos x.$$

Exemple: *i*) $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\frac{1}{2}$.

ii) $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$; $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

iii) $\sin 315^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 315^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. ***Paritatea/imparitatea funcțiilor trigonometrice***

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x, \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

4. ***Periodicitatea funcțiilor trigonometrice***

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x,\ \cos(x + 2k\pi) = \cos x,\ \operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x, (\forall) k \in \mathbf{R}, (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

5. ***Formule de calcul***

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a, \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a,$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b, \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b,$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}, \operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\ \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)), \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)).$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y)).$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, (\forall) x \in \mathbf{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbf{R}\};$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, (\forall) x \in \mathbf{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbf{R}\}$$

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. (timp de lucru: 90 min.) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** Determinați cel mai mic dintre numerele $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$ și $\sin\frac{\pi}{3}$.

10p **2.** Dacă $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos a = \frac{12}{13}$, calculați $\sin a$ și $\sin 2a$.

10p **3.** Calculați: a) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 140^\circ + \cos 160^\circ$; b) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$.

20p **4.** Demonstrați că: $\cos^2 0^\circ + \cos^2 1^\circ + \ldots + \cos^2 89^\circ = \frac{91}{2}$.

10p **5.** Știind că $\operatorname{ctg} a = 2$, calculați $\operatorname{tg} a$ și $\operatorname{tg} 2a$.

10p **6.** Demonstrați că $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}, (\forall) x \in \mathbf{R}$ cu $\sin x + \cos x \neq 0$.

10p **7.** Arătați că: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -2\cos x$.

Test de evaluare 2. (timp de lucru: 90 min.) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** Comparați numerele $\sin 2$ și $\cos 2$.

10p **2.** Dacă $a \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ și $\sin a = \frac{5}{13}$, calculați $\cos a$ și $\sin\frac{a}{2}$.

10p **3.** Calculați:
a) $\sin 135^\circ + \cos 300^\circ + \cos 240^\circ - \cos 45^\circ$; b) $\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 358^\circ + \sin 359^\circ$.

10p **4.** Arătați că: a) $\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ}$. b) $16 \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = 3$.

10p **5.** Demonstrați că: $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} a + \frac{1 - \cos^2 a}{1 - \sin^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}, (\forall) a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

10p **6.** Demonstrați că numărul
$(\sin 1^\circ + \cos 1^\circ)^2 + (\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2 + (\sin 85^\circ + \cos 85^\circ)^2 + (\sin 89^\circ - \cos 89^\circ)^2$ este natural.

20p **7.** Determinați $\beta \in \mathbf{R}$, știind că $\sin^2 a \cdot \left(\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} a + \frac{1 - \sin^2 a}{1 - \cos^2 a}\right) = \beta, (\forall) a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

10p **8.** Fie $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, astfel încât $\cos 2a = \frac{1}{2}$. Calculați $\cos a$ și $\cos 3a$.

Cap. VI. APLICAȚIILE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

BREVIAR TEORETIC

1. *Teorema cosinusului*

În orice triunghi ABC avem $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ sau sub formă echivalentă $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ și simetricele acestor formule (notațiile sunt cele cunoscute).

2. *Teorema sinusului*

În orice triunghi ABC avem

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. ($R$ reprezintă raza cercului circumscris triunghiului ABC).

3. *Teorema medianei*

În orice triunghi ABC avem $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ (și analoagele).

4. *Exprimarea unghiurilor în funcție de laturi*

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ ;\ \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$ (și analoagele).

5. *Formule pentru aria triunghiului*

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = r \cdot p.$$

În particular aria triunghiului echilateral de latură l este $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** Calculați lungimea razei cercul înscris în triunghiul care are lungimile laturilor egale cu 6, 8, 10 cm.

20p **2.** Calculați lungimea razei crecului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB = 4$ și $C = \frac{\pi}{4}$.

20p **3.** Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, știind că $C = \frac{\pi}{6}$ și lungimea razei cercului circumscris triunghiului este egală cu 2 cm.

20p **4.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC, știind că $AB = 7$, $AC = 12$ și aria triunghiului ABC este egală cu $21\sqrt{3}$.

20p **5.** Fie triunghiul ABC. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare laturii AB dacă $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$.

Test de evaluare 2. (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC dacă $m(\hat{A}) = 45°$, $m(\hat{B}) = 30°$ și $AB = 4$.

20p **2.** În triunghiul ABC avem $AB = 4$, $BC = 5$ și $AC = 6$.
a) Calculați $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$; b) Arătați că $m(\hat{A}) = 2m(\hat{C})$.

10p **3.** Calculați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AC = 8$, $m(\hat{B}) = 60°$, $m(\hat{C}) = 45°$.

10p **4.** Calculați aria paralelogramului $ABCD$ știind că $AB = 4$, $AD = 6$ și $m(\widehat{ADC}) = 150°$.

10p **5.** Fie punctele $A(2,3)$, $B(4,0)$ și $C(2,0)$. Determinați aria triunghiului ABC.

10p **6.** Să se arate că triunghiul ABC, în care $\frac{a+c}{b} = \text{ctg}\,\frac{B}{2}$ este dreptunghic.

10p **7.** Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, să se arate că $AI = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

10p **8.** În triunghiul ABC, avem: $AB = 6$, $AC = 10$ și $S = 15\sqrt{3}$. Calculați BC.

Test de evaluare 3. (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,-2)$, $B(-3,-1)]iC(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului D, astfel încât $ABCD$ să fie paralelogram.

10p **2.** Paralelogramul $ABCD$ are $AB = 1$ și $BC = 2$ și $m(\sphericalangle BAD) = 60°$. Calculați diagonalele paralelogramului.

10p **3.** Calculați aria triunghiului ABC dacă $AB = 8$, $AC = 6$ și $m(\sphericalangle BAC) = 30°$.

10p **4.** În triunghiul ABC se cunosc $AB = 3$, $BC = 5$ și $AC = 6$. Calculați $\sin\frac{A}{2}$ și $\cos\frac{A}{2}$.

10p **5.** Calculați aria unui triunghi care are lungimile laturilor în progresie aritmetică cu rația 2, cu lungimea celei mai mici laturi egală cu 5, iar raza cercului înscris este egală cu 4.

10p **6.** În triunghiul obtuzunghic ABC cu $m(\hat{A}) = 90°$, $\sin A = \frac{1}{3}$, $AB = 2$ și $AC = 3$. Calculați BC.

10p **7.** Comparați lungimea medianei din d în triunghiul ABC cu lungimea înălțimii din B dacă $BC = 5$, $AC = 7$ și $AB = 9$.

10p **8.** Dacă raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $\frac{1}{\sin A}$, calculați latura BC.

10p **9.** În triunghiul dreptunghic catetele au lungimea de 8 și respectiv 10. Calculați $r \cdot R$.

TESTE FINALE

Testul 1. (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

Subiectul I (30 de puncte)

1. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 3x-1, x \geq 1 \\ x+1, x<1 \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 0 \\ 3x+1, x<0 \end{cases}$.

5p a) Calculați: $f(2^{-1}) + g(2^{-1})$.

5p b) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $f(x) = 0$.

5p c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $g(x) = x$.

2. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + x + m$, $m \in \mathbf{R}$. Determinați m, știind că:

5p a) Parabola asociată funcției este tangentă axei Ox.

5p b) Vârful parabolei asociată funcției se află pe dreapta de ecuație $y = x + 2$.

5p c) $f(x) \geq 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră ecuația $(m-1)x^2 + (2m+1)x + m - 3 = 0$, $m \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

5p a) Să se determine m pentru care ecuația are două rădăcini reale și distincte.

5p b) Să se determine m, astfel încât $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

5p c) Să se determine m, astfel încât ecuația să admită două rădăcini reale și pozitive.

2. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + (m-1)x + 2m - 2$, $m \in \mathbf{R}$. Determinați m, știind că:

5p a) Parabola asociată funcției intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p b) $f(x) \geq 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

5p c) $x_1^2 + x_2^2 = 1$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

Subiectul al III -lea (30 de puncte)

5p **1.** a) Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, astfel încât $\sin x = \frac{3}{5}$. Calculați $\cos x$ și $\sin 2x$.

5p b) Arătați că: $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \operatorname{tg} 3x$.

5p c) Arătați că: $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

5p **2.** a) Se consideră triunghiul ABC cu $a = 2\sqrt{7}$, $c = 6$ și $\cos 2B = \frac{1}{7}$. Calculați b.

5p b) Arătați că în orice triunghi ABC este adevărată relația $b \cdot \cos C - c \cdot \cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}$.

5p c) Să se determine raza cercului circumscris și raza cercului înscris în triunghiul ABC, știind că $AB = 6$, $AC = 12$ și $BC = 14$.

Testul 2. (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

Subiectul I (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+(m+1)x+m^2-m-2$, $m\in\mathbf{R}$.

5p a) Determinați m, știind că graficul funcției este situat deasupra axei Ox.

5p b) Să se determine valorile lui m, pentru care graficul funcției este tangent axei Ox.

5p c) Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $f(x)=0$, să se determine m, pentru care $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\geq 0$.

2. Fie $f_m:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f_m(x)=(m-1)x^2+(2m+1)x+m-3$, $m\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

5p a) Determinați m, dacă rădăcinile ecuației sunt reale, distincte și strict pozitive.

5p b) Determinați valorile lui m, pentru care funcția ia numai valori negative.

5p c) Pentru $m=3$, reprezentați graficul funcției și precizați imaginea sa.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră vectorii $\vec{v}=(m+1)\vec{i}+(2m+2)\vec{j}$ și $\vec{u}=(m+3)\vec{i}-(2m+1)\vec{j}$, $m\in\mathbf{R}$.

5p a) Să se determine $m\in\mathbf{R}$, pentru care vectorii sunt coliniari.

5p b) Să se determine $m\in\mathbf{R}$, pentru care cei doi vectori sunt perpendiculari.

5p c) Pentru $m=1$, să se determine unghiul format de cei doi vectori.

2. Fie triunghiul ABC în care $m(\hat{A})=\frac{\pi}{6}$, $AB=10$ și $AC=6$.

5p a) Să se determine BC.

5p b) Să se calculeze $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

5p c) Să se determine aria triunghiului ABC.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

5 **1.** a) În triunghiul ABC, considerăm punctele M,N,P, astfel încât $4\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$, $2\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BA}$. Demonstrați că punctele M,N,P sunt coliniare.

5p b) Fie $ABCD$ un paralelogram și punctele $M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $P\in(CD)$, $Q\in(DA)$, astfel încât $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}=\vec{0}$. Arătați că $MNPQ$ este paralelogram.

5p c) Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$. Exprimați în funcție de $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ și $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ vectorii $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$ și $\overrightarrow{CD}$.

2. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$, definite prin:
$a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n-3$ și $b_n=a_n-3$, $(\forall)n\geq 1$.

5p a) Calculați a_2, a_3, b_1, b_2.

5p b) Demonstrați că $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică.

5p c) Determinați termenii generali ai celor două șiruri.

Testul 3. (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze $[2+\sqrt{3}]+[2-\sqrt{3}]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

5p **2.** Aflați $x \in \mathbf{R}$, dacă $2x+1$, $3x^2+1$ și $x+4$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **3.** Să se determine $x \in \mathbf{R}$, știind că $||x-1|-2|=3$.

5p **4.** Rezolvați în $\mathbf{Z}$ inecuația: $x^2-2x+3 \leq 2x+2$.

5p **5.** Să se arate că: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

5p **6.** Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu $AB=2$. Calculați $\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, definit prin $x_0=0$ și $x_{n+1}=x_n+1+2\sqrt{x_n}, (\forall) n \in \mathbf{N}$.

5p a) Calculați x_1, x_2.

5p b) Arătați că: $x_n=n^2, (\forall) n \in \mathbf{N}$.

5p c) Arătați că: $x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

2. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+(m+2)x+m^2-4$, $m \in \mathbf{R}$. Aflați m dacă:

5p a) Valoarea minimă a funcției este -4.

5p b) $f(x) \geq 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

5p c) $x_1+x_2+x_1x_2=0$, (x_1, x_2 fiind rădăcinile ecuației $f(x)=0$).

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $2AB=3CD$ și punctele M, N, astfel încât $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}$ și $3\overrightarrow{CN}=-2\overrightarrow{BC}$.

5p a) Reprezentați punctele M și N.

5p b) Arătați că $MN \parallel AB$.

5p c) Să se determine raportul $\frac{MN}{AB}$.

2. Arătați că pentru orice valoare admisibilă a numărului real x au loc egalitățile:

5p a) $\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}-\frac{\sin x+\cos x}{\operatorname{tg}^2 x-1}=\sin x+\cos x$.

5p b) $\frac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}=\operatorname{tg}^6 x$.

5p c) $\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}=\operatorname{tg} x$.

Testul 4. (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea întreagă și partea fracționară a numărului $1+\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}$.

5p **2.** Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid |3x+1|\le 2\}$.

5p **3.** Demonstrați că: $\sqrt{x^2+xy+y^2}\ge x+\frac{y}{2}, (\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

5p **4.** Arătați că:
$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}, (\forall)n\ge 1$.

5p **5.** Determinați valorile reale ale lui x, știind că numerele $5-x$, $x+3$ și $5x+11$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **6.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\ge 1}$ în care $b_1+b_2+b_3=70$ și $b_4+b_5+b_6=560$. Calculați suma primilor zece termeni ai progresiei.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-2x+m$, unde m este un parametru real.

5p a) Determinați abscisa punctului de minim și valoarea minimă a funcției.

5p b) Aflați m pentru care $f(x)\ge 2, (\forall)x\in\mathbf{R}$.

5p c) Pentru $m=1$, rezolvați ecuația $(f\circ f)(x)=0$.

2. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(a-2)x^2+(a-1)x-a$, unde a este un număr real.

5p a) Pentru $a=3$, rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $f(x)=0$.

5p b) Pentru $a=1$, aflați valoarea maximă a funcției f.

5p c) Pentru $a=0$, rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuația $|f(x)|<1$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie ABC un triunghi, iar M mijlocul laturii AB. Demonstrați că:

5p a) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

5p b) $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

5p c) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}$.

5p **2.** a) Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=5$ și $BC=6$. Calculați distanța de la centrul de greutate al triunghiului la dreapta BC.

5p b) Demonstrați că în orice triunghi ABC are loc identitatea $b\cos C+c\cos B=a$.

5p c) Se consideră triunghiul ABC cu $B=\frac{\pi}{6}$, $C=\frac{\pi}{4}$. Demonstrați că $AB=\sqrt{2}\cdot AC$.

*

* *

CLASA A X-A

Cap. I. NUMERE REALE: PUTERI, RADICALI, LOGARITMI

BREVIAR TEORETIC

1. *Radicali*

Dacă $a \in [0,+\infty)$, $n \in \mathbf{N}$ par,atunci $\sqrt[n]{a}$ este soluția pozitivă a ecuației $x^n = a$.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, (\forall)\, a \in [0,+\infty), (\forall)\, n \in \mathbf{N} \text{ par.}$$

Dacă $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ impar, atunci $\sqrt[n]{a}$ este soluția reală a ecuației $x^n = a$.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, (\forall)\, a \in \mathbf{R}, (\forall)\, n \in \mathbf{N} \text{ impar.}$$

Proprietăți:

- $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|, (\forall)\, a \in \mathbf{R}$; $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a, (\forall)\, a \in \mathbf{R}$.
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$.
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, $\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$, unde $a, b \in [0,+\infty)$, pentru m și n numere naturale pare, iar $a, b \in \mathbf{R}$, pentru m și n numere naturale impare.

2. *Puteri cu exponent rațional*

Dacă $a \in \mathbf{R}$, $m, n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 2$, atunci $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Observație: $a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$, $a \neq 0$ și $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, $a \neq 0$.

Proprietăți: Dacă $a, b > 0$ și $p, q \in \mathbf{Q}$, atunci:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q},\ (a^p)^q = a^{p \cdot q},\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q},\ a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p,\ \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p.$$

Medii

- Media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$: $m_a = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.
- Media geometrică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitive: $m_g = \sqrt[n]{a_1, a_2, \ldots, a_n}$.

3. *Logaritmi*

Pentru $a > 0$, $a \neq 1$ și $x > 0$, avem: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

În particular: $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$.

Observații: $\log_a(a^x) = x, (\forall)\, x \in \mathbf{R}$; $a^{\log_a x} = x, (\forall)\, x > 0$.

Proprietăți și operații:

Pentru $a > 0$, $a \neq 1$, $x, y > 0$, $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$:

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \log_a x$; $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$; $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a x$.

4. *Formula de schimbare a bazei*

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, pentru orice $a, b, x > 0$ și $a, b \neq 1$. În particular: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** Calculați: $\sqrt[5]{32} - \frac{1}{2^{-1}}$.

10p **2.** Rezolvați în **R** ecuația: $(x-1)^3 = 10$.

10p **3.** Arătați că numărul $\log_{\sqrt{5}} 25$ este număr natural.

10p **4.** Determinați valorile reale ale lui x, pentru care există numărul $A = \log_{x-1}(x^2-9)$.

10p **5.** Demonstrați că numărul x este întreg, unde $x = \lg 2 + \lg\frac{3}{2} + \lg\frac{4}{3} + \ldots + \lg\frac{1000}{999}$.

10p **6.** Calculați: $9^{\log_3 2} + \sqrt[3]{2}^{\log_2 27}$.

10p **7.** Comparați $\log_5 20$ cu $\log_6 40$.

10p **8.** Determinați $a \in \mathbf{R}$ pentru care $5^a = \sqrt{125} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{5}}\right)^2$.

10p **9.** Dacă $a, b, c > 1$, arătați că: $\log_b a + \log_c b + \log_a c \geq 3$.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** Rezolvați în **R** ecuația: $(x+1)^{2018} = 1$.

10p **2.** Calculați: $\log_5 100 + \log_5 2 - \log_5 12$.

10p **3.** Arătați că numărul $A = \log_{\sqrt[3]{2}} \frac{4}{\sqrt[5]{8}}$ este număr rațional.

10p **4.** Calculați media geometrică a numerelor $a = 18$, $b = 28$ și $c = 147$.

10p **5.** Determinați valorile reale ale lui x, pentru care există numărul $A = \sqrt{\frac{x^2+x-6}{x+5}}$.

10p **6.** Calculați: $\log_2(\sqrt[3]{5} - 1) + \log_2(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1)$.

10p **7.** Aflați $[x]$, unde $x = \log_{15} 200$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

10p **8.** Dacă $\log_2 5 = a$, calculați în funcție de a $\lg 40$.

10p **9.** Determinați numărul real a pentru care: $3^a = 9\sqrt{3\sqrt[5]{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[10]{3}}$.

Cap. II. NUMERE COMPLEXE

BREVIAR TEORETIC

Mulțimea numerelor complexe este: $\mathbf{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$.

Forma algebrică a unui număr complex

Numărul $z = a+bi, (\forall) a,b \in \mathbf{R}$ este forma algebrică a unui număr complex.

Numărul $a = \text{Re}(z)$ este partea reală a lui z și $b = \text{Im}(z)$ este partea imaginară a lui z.

Egalitatea

Dacă $z_1 = a_1 + b_1 i$ și $z_2 = a_2 + b_2 i$, atunci $z_1 = z_2$ dacă și numai dacă $a_1 = a_2$ și $b_1 = b_2$.

Puterile naturale ale lui i

$$i^n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n = 4k \\ i, \text{ dacă } n = 4k+1 \\ -1, \text{ dacă } n = 4k+2 \\ -i, \text{ dacă } n = 4k+3 \end{cases}, k \in \mathbf{N}. \text{ În particular } i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i.$$

Conjugatul unui număr complex

Dacă $z = a+bi$, atunci $\overline{z} = a-bi$ este conjugatul lui z.

Observație: $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow b = 0$.

Proprietăți:

Pentru orice $z_1, z_2, z \in \mathbf{C}$, avem:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- $\overline{z}^n = \overline{z^n}, n \in \mathbf{N}$.
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$.

Modulul unui număr complex

Dacă $z = a+bi$, atunci $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Proprietăți:

Pentru orice $z_1, z_2, z \in \mathbf{C}$, avem:

- $|z| \geq 0, (\forall) z \in \mathbf{C}; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$.
- $|z^n| = |z|^n$.
- $|\overline{z}| = |z|$.
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Rezolvarea ecuației de gradul doi cu coeficienți reali

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, are soluții reale dacă $\Delta = b^2 - 4ac$ este pozitivă sau zero și soluții complexe nereale în cazul în care Δ este strict negativ.

În acest ultim caz soluțiile sunt $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $\overline{x_1} = x_2$.

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p 1. Arătați că numărul complex $z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ este număr real.

10p 2. Calculați: $A=i^{2015}+i^{2016}+i^{2017}+i^{2018}$.

10p 3. Determinați numărul real x pentru care z este număr real, unde $z=(x+1)2i-3+8i$.

10p 4. Rezolvați în $\mathbf{C}$ ecuația: $x^4+3x^2+2=0$.

10p 5. Aflați partea reală a numărului $z=\frac{1}{3-i}+\frac{i}{3+i}$.

10p 6. Aflați modulul numărului complex $z=\frac{4-3i}{3+4i}$.

10p 7. Scrieți o ecuație de gradul a II-lea cu coeficienți reali care are una din soluții $z_1=2+3i$.

10p 8. Aflați toate numerele complexe $z=a+bi$, cu $a,b\in\mathbf{Z}$, pentru care $|z|=\sqrt{5}$.

10p 9. Dacă $z\in\mathbf{C}$ și $|z|\leq\frac{1}{5}$, arătați că $|(7+24i)\cdot z+5i|\leq 10$.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p 1. Arătați că numărul complex $z=(1+i)^4$ este număr real.

10p 2. Calculați modulul numărului complex $z=\left(\frac{1}{3}+\frac{2i\sqrt{2}}{3}\right)^{10}$.

10p 3. Arătați că dacă $z\in\mathbf{C}$ verifică relația $z+\overline{z}=6$, atunci $\mathrm{Re}(z)=3$.

10p 4. Arătați că numărul $z=(i-2)^{100}+(2+i)^{100}$ este număr real.

10p 5. Determinați perechile $(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, pentru care este adevărată egalitatea de numere complexe: $x+y+3ix+3iy=11+15i-xy$.

10p 6. Rezolvați în $\mathbf{C}$ ecuația: $x^3=8$.

7. Se consideră funcția $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}, f(z)=\overline{z}$.

10p a) Determinați toate numerele complexe $z=a+bi$, cu $a,b\in\mathbf{Z}$, pentru care $f(z)\cdot f(\overline{z})=1$.

10p b) Rezolvați în $\mathbf{C}$ ecuația $f(z)=z$.

10p c) Determinați $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$ pentru care $f(i^n)+f(i^{n-1})+f(i^{n-2})\in\mathbf{R}$.

Cap. III. PROBLEME DE NUMĂRARE BINOMUL LUI NEWTON PROBABILITĂȚI

BREVIAR TEORETIC

Dacă A este o mulțime finită (cu număr finit de elemente), atunci $card(A)$ reprezintă numărul elementelor mulțimii A (cardinalul mulțimii A).

Probleme de numărare

Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulțime cu n elemente.

1. Permutări

Numărul mulțimilor ordonate (permutărilor) formate cu cele n elemente ale mulțimii A este:

$$P_n = n!, \text{ unde } n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n,\ 0! = 1.$$

2. Aranjamente

Numărul submulțimilor ordonate (aranjamente) cu k elemente, $k \leq n$ ale mulțimii A este:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3. Combinări

Numărul submulțimilor (combinări) cu k elemente, $k \leq n$ ale mulțimii A este:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Are loc egalitatea (formula combinărilor complementare): $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Aplicații

- Numărul funcțiilor bijective definite pe o mulțime cu n elemente cu valori într-o mulțime cu n elemente este P_n.
- Numărul funcțiilor injective definite pe o mulțime cu k elemente cu valori într-o mulțime cu n elemente, $k \leq n$ este A_n^k.
- Numărul funcțiilor strict crescătoare (strict descrescătoare) definite pe o mulțime cu k elemente (numere) cu valori într-o mulțime cu n elemente (numere) $k \leq n$ este C_n^k.
- Numărul funcțiilor $f: A \to B$, cu A, B mulțimi finite, este $(\text{card}(B))^{\text{card}(A)}$.
- Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Binomul lui Newton

Dacă $a, b \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} \cdot b + C_n^2 a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a \cdot b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Observații: 1) Dezvoltarea are $n+1$ termeni.

2) $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ se numesc coeficienți binomiali ai dezvoltării.

3) Formula termenului general este: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} \cdot b^k$, $(\forall) k = \overline{0,n}$.

4) Coeficienții binomiali simetrici sunt egali.

Sume importante cu combinări

$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$; $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n \cdot C_n^k = (1-1)^n = 0$;

$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$; $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$.

Probabilitatea realizării unui eveniment A se definește prin:

$$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile evenimentului } A}{\text{numărul cazurilor posibile evenimentului } A}.$$

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p 1. Calculați numărul submulțimilor ordonate cu număr impar de elemente ale mulțimii: $A = \{x, y, z\}$.

10p 2. Determinați câte numere din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 90\}$ prin împărțire la 5 dau restul 1.

10p 3. Aflați câte numere divizibile cu 5 formate din 2 cifre au prima cifră pătrat perfect.

10p 4. Se consideră mulțimea de funcții $\mathcal{F} = \{f: \{1,2,3\} \to \{5,6,7\}\}$. Care este probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea $\mathcal{F}$ aceasta să fie bijectivă?

10p 5. Determinați valorile numărului natural x pentru care $C_x^2 \geq A_{x-1}^2$.

10p 6. Determinați numărul funcțiilor injective $f: \{a, b, c\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ cu proprietatea $f(a) = 0$.

10p 7. Calculați: $C_{10}^0 2^{10} - C_{10}^1 2^9 + C_{10}^2 2^8 - \ldots + C_{10}^{10}$.

10p 8. Arătați că termenul din mijloc al dezvoltării $(\sqrt[3]{5} + 1)^6$ este număr natural.

10p 9. Determinați termenul din dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ care nu conține pe x.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p 1. Calculați: $C_{205}^5 + C_{205}^6 - C_{206}^{200}$.

10p 2. Determinați numărul elementelor unei mulțimi, știind că aceasta are 42 submulțimi ordonate cu 2 elemente.

10p 3. Se consideră mulțimea $B = \{1, 5, 9; \ldots, 45\}$. Aflați probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii B, acesta să fie multiplu al lui 3.

10p 4. Determinați câte feluri de salată de fructe se pot pregăti având la dispoziție 5 fructe, știind că o salată de fructe trebuie să conțină minim 2 fructe.

10p 5. Numărul funcțiilor $f: A \to \{x, y, z, t\}$ este 64. Aflați numărul de elemente al mulțimii A.

10p 6. Rezolvați în mulțimea **N** ecuația $C_{27}^{3n} = C_{27}^3$.

10p 7. După o ieftinire cu 10% și o scumpire cu 10% prețul unui produs este de 990 de lei. Aflați prețul inițial al produsului.

10p 8. Determinați numărul real x, știind că al treilea termen al dezvoltării $(3^x + 9^{x-6})^{10}$ este 45.

10p 9. Aflați numărul termenilor iraționali ai dezvoltării $(\sqrt[3]{2} + \sqrt{5})^{100}$.

Cap. IV. FUNCȚII. ECUAȚII

BREVIAR TEORETIC

Funcții injective, surjective, bijective

- $f: A \to B$ este *injectivă* $\Leftrightarrow (\forall) x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$, rezultă $x_1 = x_2$ sau $(\forall) x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, rezultă $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observație: Dacă o funcție este strict monotonă, atunci ea este injectivă.

- $f: A \to B$ este *surjectivă* $\Leftrightarrow (\forall) y \in B, (\exists) x \in A$, astfel încât $f(x) = y$.

Observație: Dacă $\text{Im} f = B$, atunci f este surjectivă.

- $f: A \to B$ este *bijectivă* dacă și numai dacă este injectivă și surjectivă.

Funcții inversabile

Funcția $f: A \to B$ este *inversabilă* dacă există $g: B \to A$, astfel încât $f \circ g = 1_B$, unde 1_B este funcția identică a mulțimii B și $g \circ f = 1_A$, unde 1_A este funcția identică a mulțimii A. Funcția g este inversa lui f și notăm $g = f^{-1}$.

Observație: O funcție este inversabilă dacă și numai dacă funcția este bijectivă. Dacă, f este funcție bijectivă, ecuația $f(x) = y$ are soluție unică $x = f^{-1}(y)$.

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, (\forall) x \in B, \ (f^{-1} \circ f)(x) = x, (\forall) x \in A.$$

Proprietate:

Dacă $f: A \to B$ și $g: B \to C$ sunt inversabile, atunci $g \circ f: A \to C$ este inversabilă și $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ecuații exponențiale fundamentale

Dacă $a > 0, a \neq 1$, atunci $a^x = y, y > 0 \Leftrightarrow x = \log_a y$. Dacă $y \leq 0$ ecuația $a^x = y$ nu are soluții.

În particular dacă $a^x = a^y$, atunci $x = y$.

Ecuații logaritmice fundamentale

Dacă $a > 0, a \neq 1, x > 0$.

Dacă $\log_a x = y$, atunci $x = a^y, y \in \mathbf{R}$.

În particular: $\log_a x = \log_a y$, $a > 0$ și $a \neq 1$ are soluția $x = y$.

Ecuații iraționale fundamentale

Dacă $\sqrt[2k]{x} = y, x, y \geq 0$, atunci $x = y^{2k}, k \in \mathbf{N}^*$.

Dacă $\sqrt[2k+1]{x} = y, x, y \in \mathbf{R}$, atunci $x = y^{2k+1}, k \in \mathbf{N}^*$.

Ecuații trigonometrice fundamentale

- Ecuația $\sin x = a, a \in [-1, 1]$ are soluția:

$x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ sau $x \in \{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

- Ecuația $\cos x = a, a \in [-1, 1]$ are soluția: $x \in \{\pm \arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.
- Ecuația $\text{tg}\, x = a, a \in \mathbf{R}$, are soluția: $x \in \{\text{arctg}\, a + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.
- Ecuația $\text{ctg}\, x = a, a \in \mathbf{R}$, are soluția: $x \in \{\text{arcctg}\, a + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p 1. Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=3^{x+1}-9$, cu axele Ox și Oy.

10p 2. Arătați că $f:(2,+\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\log_{\frac{1}{5}}(x-2)+1$ este strict descrescătoare pe $(2,+\infty)$.

10p 3. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt[3]{5^{x+1}}=25$.

10p 4. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-4x+4}=12$.

10p 5. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_5 x+\log_{25} x=6$.

10p 6. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $2\cdot\cos\left(1-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$.

10p 7. Rezolvați în intervalul $[0,\pi]$ ecuația: $\sin^2 x-\sin x=0$.

10p 8. Determinați imaginea funcției $f:[1,5]\to\mathbf{R}, f(x)=\sqrt{x-1}$.

10p 9. Demonstrați că funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\sqrt[3]{2x-3}$ este inversabilă.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p 1. Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției $f:(-9,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\log_3(x+9)$ cu axele Ox și Oy.

10p 2. Rezolvați în $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ecuația: $3\sin^2 x=\cos^2 x$.

10p 3. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $7^{x+1}\cdot 3^x=147$.

10p 4. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $(\sqrt{5}-2)^x+(\sqrt{5}+2)^x=18$.

10p 5. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_5\left(\log_2(x+22)\right)=1$.

10p 6. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_3(2x+3)+\log_3(2x-3)=\log_9(x^4)$.

10p 7. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $(\sqrt[3]{x+7}-2)(\sqrt{2x-1}-x)=0$.

10p 8. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt[3]{7x^2+18x+8}=x+2$.

10p 9. Se consideră funcția $f:[0,1]\to[0,1], f(x)=\cos(\arcsin x)$.

a) Arătați că f este strict descrescătoare pe $[0,1)$.

b) Știind că f este funcție bijectivă, demonstrați că $f^{-1}=f$.

Cap. V. ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ

BREVIAR TEORETIC

Dacă P este un punct în reperul cartezian xOy, notăm x_p abscisa punctului P și y_p ordonata punctului P.

1. Distanța dintre 2 puncte

Dacă $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$, atunci:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

2. Mijlocul unui segment

Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, atunci coordonatele lui M sunt:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

3. Punctul care împarte segmentul $[AB]$ în raport k

Dacă $\frac{AM}{MB} = k$, atunci $x_M = \frac{x_A + k \cdot x_B}{1+k}; y_M = \frac{y_A + k y_B}{1+k}$.

4. Centrul de greutate al unui triunghi

Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ecuația unei drepte

5. Ecuația carteziană generală a unei drepte *d*

$$d: ax + by + c = 0.$$

Ecuația unei drepte orizontale

$d: y = a$, $a \in \mathbf{R}$. În caz particular Ox: $y = 0$.

Ecuația unei drepte verticale

$d: x = a$. În caz particular Oy: $x = 0$.

6. Apartenența unui punct la o dreaptă

Punctul $M(x_M, y_M)$ se află pe dreapta de ecuație $ax + by + c = 0$, dacă:

$$a \cdot x_M + b \cdot y_M + c = 0.$$

Panta (coeficientul unghiular) unei drepte *d*

Notăm $m_d = \operatorname{tg} a$, unde a este unghiul făcut de dreapta d cu sensul pozitiv al axei Ox.

- Dacă d: $ax + by + c = 0$, atunci $m_d = \frac{-a}{b}$.
- Dacă d: $y = mx + n$, atunci $m_d = m$.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Observație: Dreptele orizontale au pantă. Dreptele verticale nu au pantă.

7. Condiția de paralelism: $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$.

8. Condiția de perpendicularitate: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1$.

9. Determinarea ecuației unei drepte

- Dacă se cunosc coordonatele a două puncte AB: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$
- Dacă panta m a dreptei d și coordonatele (x_0, y_0) ale unui punct de pe dreapta: $M_0(x_0, y_0)$.

$$d: y - y_0 = \text{cu } (x - x_0).$$

10. Condiția de coliniaritate a trei puncte:

A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow A$ verifică ecuația dreptei BC și similarele sau dacă $m_{AB} = m_{AC}$ și similarele

11. Distanța de la punctul $M_0(x_0, y_0)$ la dreapta d: $ax + by + c = 0$.

$$d(M_0, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

12. Distanța dintre două drepte paralele d_1 și d_2

Se consideră M_0 oarecare, $M_0 \in d_1$. Atunci: $d(d_1, d_2) = d(M_0, d_2)$.

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** În reperul xOy se consideră punctele $A(1,0)$ și $B(5,4)$. Determinați lungimea segmentului OP, unde $P \in [AB]$, astfel încât $\frac{PA}{PB} = 3$.

10p **2.** În reperul xOy se consideră punctele $A(2,-3)$ și $B(0,1)$. Aflați coordonatele simetricului punctului B față de punctul A.

10p **3.** În reperul xOy se consideră punctele $E(-1,3)$ și $F(0,2)$. Scrieți ecuația dreptei perpendiculare pe EF ce trece prin F.

10p **4.** Se consideră dreptele $a: x+y-5=0$, $b: x-y+1=0$ și $c: mx+2y-9=0$. Determinați valoarea parametrului real m pentru care dreptele a, b și c sunt concurente.

10p **5.** În reperul xOy se dau punctele $A(1,3)$, $B(5,6)$ și $C(0,-3)$. Scrieți ecuația dreptei OG, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

10p **6.** În reperul xOy se consideră punctele $A(-6,-2)$, $B(0,4)$, $C(4,0)$ și $D(1,a), a \in \mathbf{R}$.

a) Calculați lungimea înălțimii din B a triunghiului ABC.
b) Scrieți ecuația dreptei ce trece prin B și este paralelă cu dreapta AC.
c) Determinați valorile numărului real a pentru care aria triunghiului BCD este 4.
d) Determinați coordonatele piciorului înălțimii din B a triunghiului ABC.

10p **7.** Determinați $m \in \mathbf{R}$, știind că punctele $A(-1,3)$, $B(2,4)$ și $C(m,2)$ sunt coliniare.

10p **8.** Arătați că dreptele $d_1: 2x-y+6=0$ și $d_2: -4x+2y-5=0$ sunt paralele și determinați $d(d_1, d_2)$.

10p **9.** În reperul cartezian xOy fie punctele $A(2,3)$, $B(-1,-1)$ și $C(5,2)$. Calculați distanța de la centrul de greutate al triunghiului ABC la AB, BC și CA.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

10p **1.** În reperul xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,-1)$, $C(0,4)$ și $D(a,1)$. Determinați valoarea parametrului real a pentru care $AB \parallel CD$.

10p **2.** Se dau dreptele $d_1 : 2x-y+6=0$ și $d_2 : -4x+2y-11=0$. Demonstrați că $d_1 \parallel d_2$ și aflați distanța dintre cele două drepte.

10p **3.** În reperul xOy se consideră punctele $A(2,-3)$, $B(-1,0)$ și $C(a^2, a-1)$. Determinați valorile parametrului real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

10p **4.** În reperul xOy se consideră dreapta $d : x-y+4=0$. Scrieți ecuația dreptei ce trece prin O și este perpendiculară pe d.

10p **5.** Dacă dreptele $d_1 : x-2y+5=0$ și $d_2 : 2x+y=0$ sunt ecuațiile înălțimilor din A și din B ale triunghiului ABC, determinați ecuația înălțimii din punctul $C(2,3)$.

10p **6.** În reperul xOy se consideră punctul $M(2,1)$. Aflați coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, unde A, B și C sunt simetricele punctului M față de Ox, Oy și $O(0,0)$.

10p **7.** Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, unde $A(3,3)$, $B(0,3)$ și $C(0,3)$.

10p **8.** Calculați aria patrulaterului $ABCD$, unde $A(2,0), B(6,4), C(4,6)$ și $D(0,2)$.

10p **9.** Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $A(-4,0)$, $B(0,2)$ și $C(6,-2)$.

TESTE FINALE

Testul 1. - (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 punct.

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se arate că: $\left(\frac{4+3i}{3-4i}\right)^{100} \in \mathbf{N}$.

5p **2.** Să se arate că numărul $A = \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3} + \ldots + \log_3 \frac{80}{81}$ este întreg.

5p **3.** Să se demonstreze că funcția $f: (0,\infty) \to (5,\infty)$, $f(x) = x^2 + 2x + 5$ este bijectivă și să se determine inversa ei.

5p **4.** Să se rezolve în **R** ecuația: $2^{2x} - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$.

5p **5.** Să se rezolve, în mulțimea $[0, 2\pi]$, ecuația: $\cos 2x = \sin x$.

5p **6.** Să se rezolve în **R** ecuația: $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{2x+2} = 3$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. În sistemul cartezian (xOy) se consideră punctele $A(1,5)$, $B(-3,1)$ și $C(3,-1)$.

5p a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

5p b) Să se calculeze lungimile înălțimilor triunghiului ABC.

5p c) Să se determine coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

2. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, unde $x > 0$ și $n \in \mathbf{N}^*$.

5p a) Determinați n știind că al treilea coeficient binomial al dezvoltării este 21.

5p b) Pentru $n = 7$, să se determine termenul dezvoltării care îl conține pe x^3.

5p c) Pentru $n = 7$ și $x = 2$, să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

5p **1.** a) Să se rezolve ecuația: $19 \cdot A_{x-4}^4 = 30 \cdot C_{x-3}^{x-9}$.

5p b) Care este valoarea maximă a funcției $f(x) = C_{8x}^{x^2+12}$ pe domeniul ei de definiție?

5p c) Se dă binomul $\left(\frac{1}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + x^{2 \cdot \lg x}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$, $x > 0$, având suma coeficienților binomiali egală cu 256. Să se determine x, știind că al șaselea termen al dezvoltării este 5600.

2. Se consideră punctele $A(0,1)$, $B(-1,-1)$ și $C(1,-3)$.

5p a) Calculați aria triunghiului ABC.

5p b) Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$.

5p c) Calculați: $\cos(\widehat{ABC})$.

Testul 2. - (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 punct.

Subiectul I (30 de puncte)

5p 1. Să se determine $z \in \mathbf{C}$, dacă $|z| + 2z - 3\bar{z} = 2 + 20i$.

5p 2. Să se arate că numărul $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$ este număr natural.

5p 3. Dacă $a = \lg 2$ și $b = \lg 3$, să se calculeze în funcție de a și b numărul $\log_{12} 48$.

5p 4. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_2(3x+2) + \log_2(x-1) = 3$.

5p 5. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3$.

5p 6. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. În sistemul cartezian (xOy) se consideră punctele $A(2,6)$, $B(-2,2)$ și $C(6,-2)$.

5p a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

5p b) Să se calculeze lungimea medianelor triunghiului ABC.

5p c) Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

2. Se consideră ecuația $m \cdot \cos 2x - (4m+1) \cdot \sin x + m - 1 = 0$, $m \in \mathbf{R}^*$.

5p a) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația pentru $m = 1$.

5p b) Determinați valorile parametrului real m, astfel încât ecuația să aibă rădăcini reale.

5p c) Determinați valorile parametrului real m, astfel încât ecuația să aibă rădăcini în mulțimea $(0, \pi)$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră numerele complexe $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$.

5p a) Arătați că: $|z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 = |z_1 - z_2|^2$.

5p b) Să se arate că dacă $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, atunci:

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{1 + z_1 z_2 z_3} \in \mathbf{R},\ z_1 z_2 z_3 \neq -1.$$

5p c) Să se arate că: $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$.

2. Fie $z = (1+i)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

5p a) Să se determine $\mathrm{Re}(z)$ și $\mathrm{Im}(z)$.

5p b) Să se arate că: $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n\pi}{4}$.

5p c) Să se arate că: $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}\right)$.

Testul 3. - (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 punct.

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați: 10% din 37.

5p **2.** Calculați: $5!-4!+3!$.

5p **3.** Dacă 17% din prețul unui obiect este egal cu 204 lei, aflați prețul obiectului.

5p **4.** Aflați probabilitatea de a obține un număr prim la aruncarea unui zar.

5p **5.** Aflați numărul funcțiilor pare $f:\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\to\{C_7^1, C_7^2, C_7^3\}$.

5p **6.** Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, unde:
$A(1,2)$, $B(-1,5)$, $C(3,7)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie dezvoltarea $B(x)=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n, x\neq 0, n\in\mathbf{N}^*, n\geq 3$.

5p a) Aflați valorile lui $n\in\mathbf{N}^*, n\geq 3$, pentru care suma primilor trei coeficienți ai dezvoltării este egală cu $(n-4)^2$.

5p b) Pentru $n=15$, aflați rangul termenului care nu îl conține pe x.

5p c) Pentru $n=17$, aflați rangul termenului care îl conține pe x^7.

2. Calculați sumele:

5p a) $S=C_{2015}^1+2\cdot C_{2015}^2+3\cdot C_{2015}^3+\ldots+2015\cdot C_{2015}^{2015}$.

5p b) $T=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2014}{2015!}$.

5p c) $U=\frac{C_{2015}^0}{1}+\frac{C_{2015}^1}{2}+\ldots+\frac{C_{2015}^{2015}}{2016}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie punctele $A(-3,0)$, $B(0,7)$ și $C(4,2)$.

5p a) Aflați perimetrul triunghiului ABC.

5p b) Aflați aria triunghiului ABC.

5p c) Aflați distanța de la punctul A la dreapta BC.

2. Fie punctele $A(-1,m)$, $B(0,m+3)$ și $C(2,1), m\in\mathbf{R}$.

5p a) Aflați pantele dreptelor AB și BC.

5p b) Determinați valorile lui $m\in\mathbf{R}$, pentru care punctele A, B, C sunt coliniare.

5p c) Scrieți ecuația dreptei ce trece prin origine și este paralelă cu dreapta AB.

Testul 4. - (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 punct.

Subiectul I (30 de puncte)

5p 1. Calculați probabilitatea de a obține o bilă albă dacă extragem o bilă la întâmplare dintr-o urnă ce conține 16 bile albe și 7 bile negre.

5p 2. Aflați numărul ce reprezintă 25% din 1476.

5p 3. Determinați câte funcții injective $f:\{1,2,3\}\to\{5,7,9,11\}$ există.

5p 4. Determinați coordonatele punctului M cu proprietatea că $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$ și $A(1,3)$, $B(7,9)$.

5p 5. Calculați valoarea fracției $\frac{A_7^3}{A_4^2}$.

5p 6. Aflați panta dreptei AB, unde $A(-1,0)$ și $B(2,3)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

5p 1. a) Demonstrați că: $\frac{2015!}{1946!\cdot 69!}\in\mathbf{N}$.

5p b) Aflați numărul termenilor raționali din dezvoltarea $(\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{4})^{100}$.

5p c) Aflați rangul celui mai mare termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)^{100}$.

2. Rezolvați în **R** ecuațiile:

5p a) $\log_{x+4}\left(\log_3\frac{x-1}{x+1}\right)=0$.

5p b) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^{2x}+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{2x}=62\cdot 2^x$.

5p c) $\sqrt{\cos 2x}=1+2\sin x$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Considerăm punctele $A(-3,-1)$, $B(-1,5)$ și $C(3,0)$.

5p a) Scrieți ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

5p b) Scrieți ecuația dreptei BC.

5p c) Scrieți ecuația înălțimii din A a triunghiului ABC.

2. Considerăm punctele $A(-2,-3)$, $B(-1,5)$, $C(4,7)$ și $D(3,-1)$.

5p a) Calculați coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$.

5p b) Arătați că $ABCD$ este paralelogram.

5p c) Dacă punctul M are proprietatea că $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$, aflați coordonatele centrului de greutate al triunghiului MCD.

*

* *

CLASA A XI-A * ALGEBRĂ *

Cap. I. PERMUTĂRI

BREVIAR TEORETIC

1. O ***permutare de ordin n*** este o funcție bijectivă $\sigma : A \to A$, unde $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. În general, vom scrie o permutare sub formă: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Notăm cu S_n mulțimea tuturor permutărilor de ordin n; $card\, S_n = n!$.

2. ***Semnul unei permutări.*** O pereche $(i,j) \in A \times A$ cu $i < j$ se numește *inversiune* a lui σ dacă $\sigma(j) < \sigma(i)$. Notăm cu $m(\sigma)$ numărul de inversiune a lui σ; atunci semnul permutării σ este $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$.

3. O ***permutare*** se numește ***pară*** dacă are semnul +1 și se numește ***impară*** dacă are semnul −1. Semnul produsului a două permutări este egal cu produsul semnelor acestora.

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$.

2p a) Aflați cardinalul mulțimii $A = \{\sigma^n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.

1p b) Rezolvați ecuația $\sigma x = \tau$.

2. Fie permutarea $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2p a) Calculați numărul inversiunilor permutării θ.

1p b) Rezolvați în S_σ ecuația: $x^4 = \theta$.

2p c) Demonstrați că dacă $\theta^n = \theta$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci $n - 1 \vdots 4$.

3. Aflați permutarea $\sigma \in S_n$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, pentru care:

1p $$1 + \sigma(n) = 2 + \sigma(n-1) = 3 + \sigma(n-2) = \ldots = n + \sigma(1).$$

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$.

1p a) Să se calculeze σ^{2017} și τ^{2017}.

1p b) Să se determine numărul inversiunilor permutărilor σ și τ.

1p c) Arătați că ecuația $x^4 = \sigma$ nu are soluții în S_5.

1p d) Să se determine permutarea $x \in S_5$, astfel încât $x \cdot \sigma = \tau$.

1p e) Să se determine permutarea $y \in S_5$, astfel încât $\sigma \cdot y = \tau$.

2. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$.

1p a) Să se arate că $\sigma^{2019} = e$.

1p b) Să se determine permutarea $x \in S_4$, astfel încât $x \cdot \sigma = \sigma x$.

1p c) Să se determine permutarea $x \in S_4$, astfel încât $x^2 = \sigma$.

1p d) Să se determine permutarea $x \in S_4$, astfel încât $x^{2017} = \sigma$.

Test de evaluare 3. - (timp de lucru: 100 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră permutările: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$.

0,5p a) Să se calculeze $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$.

1p b) Să se calculeze σ^{2017} și τ^{2017}.

0,5p c) Să se determine signatura permutărilor σ și τ.

1p d) Să se arate că ecuația $x^{2018} = \tau$ nu are soluții în S_5.

0,5p e) Să se determine $x \in S_5$, astfel încât $\tau x = \sigma$.

0,5p f) Să se determine $y \in S_5$, astfel încât $y\sigma = \tau$.

2. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$.

1p a) Să se calculeze: σ^{2018}.

0,5p b) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii $A = \{\sigma^n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.

1p c) Să se determine permutările $x \in S_5$, astfel încât $\sigma x = x\sigma$.

1p d) Să se determine permutările $x \in S_5$, astfel încât $x^2 = \sigma$.

0,5p e) Să se determine permutările $x \in S_5$, astfel încât $x^{2017} = \sigma$.

1p f) Să se arate că ecuația $x^{2019} = \sigma$ nu are soluții în S_5.

Cap. II. MATRICE

BREVIAR TEORETIC

Noțiunea de matrice

O funcție $A:\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}\to\mathbf{C}$ se numește *matrice* de tip (m,n) (cu m linii și n coloane). Scriem:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ sau $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$. Dacă $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, notăm:

$${}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ *transpusa matricei A*. Se observă că: ${}^tA\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$.

Diagonalele unei matrici pătrate. Urma unei matrici pătrate

Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice pătrată; sistemul ordonat $(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$ reprezintă *diagonala principală* a matricei A, iar $(a_{1n},a_{2n-1},\ldots,a_{n1})$, *diagonala secundară* a matricei A.

Numărul $\mathrm{Tr}A\overset{def}{=}a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$ (suma elementelor de pe diagonala principală) se numește *urma* matricei A.

Adunarea

$A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$.

Suma matricelor A, B este matricea $A+B=C\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $C=(c_{ij})$, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (adunarea se face pe componente) oricare ar fi $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Matricea $O_{mn}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ se numește *matricea nulă*. O_{mn} este element neutru față de adunarea Matricelor. $A+O_{m,n}=O_{m,n}+A=A$, $(\forall)A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$.

Înmulțirea cu scalari

$A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $A=(a_{ij})$, $\lambda\in\mathbf{C}$ (λ este un scalar).

Produsul dintre scalarul λ și matricea A este matricea: $\lambda A=C\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $C=(c_{ij})$, $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ (fiecare element al matricei A se înmulțește cu scalarul λ).

Înmulțirea matricelor

$A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{jk})$. Produsul matricelor A și B este matricea:

$$A\cdot B=C,\ \text{unde } C\in\mathcal{M}_{mp}(\mathbf{C}),\ C=(c_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le p}},\ c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}.$$

Matricea $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ se numește *matricea unitate* de ordin n și este element neutru față de înmulțirea matricelor pătrate. $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A,(\forall)A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ și $I_n^k=I_n,(\forall)k\in\mathbf{N}$.

Proprietate: Dacă $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ și $AB=BA$, atunci pentru calcularea matricei $(A+B)^n,n\in\mathbf{N}^*$ se poate folosi formula binomului lui *Newton*.

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 60 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ și $X(a)=I_2+aA$, $a\in\mathbf{R}$.

0,5p a) Să se arate că: $A^2=-2A$.

1p b) Să se arate că: $X(a)\cdot X(b)=X(a+b-2ab), (\forall)\, a,b\in\mathbf{R}$.

0,5p c) Determinați $a\in\mathbf{R}$, știind că $X(a)\cdot X(a)=I_2$.

1p d) Arătați că: $A^n=(-2)^{n-1}\cdot A, (\forall)\, n\in\mathbf{N}^*$.

0,5p e) Să se calculeze: $(X(a))^n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

0,5p f) Să se determine matricele $X\in M_2(\mathbf{R})$, astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$.

2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

1p a) Să se arate că: $A(x)\cdot A(y)=A(x+y), (\forall)\, x,y\in\mathbf{R}$.

0,5p b) Să se determine $x\in\mathbf{R}$, astfel încât: $A(x)\cdot A(x^2+x)=I_3$.

1p c) Să se calculeze: $A(1)+A(2)+\ldots+A(2017)$.

1p d) Să se calculeze: $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2017)$.

0,5p e) Să se calculeze: $A(x)^n$, $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$.

1p f) Să se determine $x\in\mathbf{R}$, știind că: $A(x)+A(-x)=2I_3$.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ și $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

0,5p a) Să se calculeze $A\cdot B$ și $B\cdot A$.

1p b) Să se calculeze A^2 și B^2.

0,5p c) Să se calculeze A^n și B^n, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$.

1p d) Să se calculeze: $(A+B)^n$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$.

0,5p e) Să se determine $X\in M_2(\mathbf{R})$, astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$.

0,5p f) Să se arate că ecuația $X\cdot A=B$ nu are soluții în $M_2(\mathbf{R})$.

2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, $x\in\mathbf{R}$.

1p a) Să se determine $x\in\mathbf{R}$, astfel încât $A(x)-{}^tA(x)=0_3$.

0,5p b) Să se arate că $A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y), (\forall)\, x,y\in\mathbf{R}$.

1p c) Să se determine $x\in\mathbf{R}$, știind că $A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)=A(7)$.

1p d) Să se determine $x\in\mathbf{R}$, știind că $A(x)\cdot A(x^2+x)=I_3$.

0,5p e) Să se determine $n\in\mathbf{N}$, știind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2017)$.

1p f) Să se calculeze $A(x)^n$, unde $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$.

Cap. III. DETERMINANȚI

BREVIAR TEORETIC

Formule de calcul

- Dacă $n=2$, atunci $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Dacă $n=3$, atunci $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$.

Determinantul produsului a două matrice pătratice de același ordin este egal cu produsul determinanților celor două matrice: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

În particular $\det(A^n) = (\det(A))^n, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Ecuația dreptei

Ecuația dreptei determinate de $A(x_1,y_1)$ și $B(x_2,y_2)$ este AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Condiția de coliniaritate a trei puncte

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ sunt *coliniare* dacă și numai dacă: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Aria triunghiului

Aria triunghiului determinat de punctele $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ este $\mathcal{A}_{[ABC]} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 5 \\ 1 & 5 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}$.

0,5p a) Calculați: $\det A(0)$.

0,5p b) Arătați că: $\det A(a) = (a-5)(a+3), (\forall) a \in \mathbf{R}$.

1p c) Determinați $x > 0$, știind că $\det(A(\lg x)) = 0$.

2. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 3 \\ x^2-2 & y^2-2 & 7 \end{vmatrix}$.

0,5p a) Calculați: $D(2,1)$.

0,5p b) Arătați că: $D(x,y)=(x-3)(y-3)(y-x),(\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

1p c) Determinați $x\in\mathbf{R}$, știind că $D(3^x,9^x)=0$.

3. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix} x & y & 5 \\ x^2 & y^2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $x,y\in\mathbf{R}$.

0,5p a) Calculați: $D(1,-1)$.

0,5p b) Arătați că: $D(x,y)=(y-x)(xy-5x-5y+3),(\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

1p c) Determinați numerele întregi și distincte x,y, astfel încât $\frac{1}{y-x}\cdot D(x,y)=1$.

4. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A_n(n+1,3n-1),n\in\mathbf{N}$.

1p a) Să se determine ecuația dreptei A_1A_2.

1p b) Să se calculeze aria triunghiului OA_1A_2.

1p c) Să se arate că $A_n\in A_1A_2$, $(\forall)n\in\mathbf{N},n\geq 3$.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Fie determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, $a,b,c\in\mathbf{R}$ și funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},f(x)=x^2+3x+5$.

0,5p a) Arătați că: $\Delta=(c-b)(c-a)(b-a)$.

0,5p b) Arătați că: $\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix}=\Delta$, $(\forall)a,b,c\in\mathbf{R}$.

1p c) Fie punctele $A(m,f(m))$, $B(n,f(n))$ și $C(p,f(p))$ de pe graficul funcției f cu $m,n,p\in\mathbf{Z}$ distincte două câte două. Arătați că aria triunghiului ABC este număr natural.

2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & x^3+1 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbf{R}$.

0,5p a) Calculați: $\det A(1)$.

0,5p b) Determinați $x\in\mathbf{R}$, știind că $\det A(x)=0$.

1p c) Determinați $x\in\mathbf{N}$, știind că $\det A(x)=4$.

3. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ y & 1 & x \end{vmatrix}$, $x,y\in\mathbf{R}$.

0,5p a) Determinați $x\in\mathbf{R}$, știind că $D(x,x)=0$.

0,5p b) Arătați că: $D(x,-x)\geq 1,(\forall)x\in\mathbf{R}$.

1p c) Arătați că: $D(x,y)\geq 0,(\forall)x,y\in[1,\infty)$.

4. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

1p a) Calculați: $\det A$.

1p b) Arătați că: $A^2=5A$.

1p c) Determinați $X\in M_2(\mathbf{R})$, astfel încât $X^5=A$.

Cap. IV. MATRICE INVERSABILE

BREVIAR TEORETIC

- Fie $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ este o matrice pătrată de ordin n. Spunem că A este *inversabilă* dacă există o matrice pătrată de ordin n, pe care o notăm A^{-1} și o numim *inversa* lui A, astfel încât $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$, unde I_n este matricea unitate de ordin n. O matrice pătrată este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A)\neq 0$. Avem $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*$, unde A^* este *adjuncta* lui A.

  Proprietate

  Dacă A și B sunt matrici pătrate de ordin n, atunci $A\cdot B$ este inversabilă și $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

- Numărul natural r este *rangul* matricei A dacă există un minor nenul de ordinul r al lui A,, iar toți minorii de ordin mai mare decât r, dacă există, sunt nuli. Matricea A are rangul r dacă și numai dacă există un minor nenul de ordin r al lui A, iar toți monorii de ordin $r+1$ obținuți prin bordarea acestui minor cu elementele corespunzătoare ale unei linii și ale unei coloane rămase, dacă există, sunt nuli.

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 60 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1+2x & -2x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$, $x\in\mathbf{R}$.

1p a) Arătați că: $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy),(\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

1p b) Determinați numerele reale x, știind că $A(x)$ este inversabilă.

1p c) Determinați numerele reale x, $x\neq -1$, știind că matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

1p d) Să se determine inversa matricei $A(2)$.

1p e) Să se determine matricea $X\in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(1)$.

1p f) Să se determine matricea $X\in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $X\cdot A(2)=A(-1)$.

2. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbf{R}$.

1p a) Să se determine $a\in\mathbf{R}$ pentru care $A(a)$ este inversabilă.

1p b) Să se afle inversa matricei $A(0)$.

1p c) Să se determine matricea $X\in M_{3,1}(\mathbf{R})$ pentru care $A(0)\cdot X=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & m \\ m & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbf{R}$.

0,5p a) Să se determine $m \in \mathbf{R}$, știind că $A(m)$ este inversabilă.

0,5p b) Să se determine inversa matricei $A(1)$.

1p c) Să se determine $m \in \mathbf{Z}$, știind că $A(m)^{-1} \in M_3(\mathbf{Z})$.

1p d) Să se determine matricea $X \in M_{3,1}(\mathbf{R})$, știind că $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ m & 1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbf{R}$.

p a) Determinați $m \in \mathbf{R}$, astfel încât $\det A(m) = m+3$.

p b) Determinați $m \in \mathbf{R}$, pentru care $A(m)$ este inversabilă.

p c) Aflați inversa matricei $A(0)$.

p d) Determinați matricea $X \in M_3(\mathbf{R})$, astfel încât $A(0) \cdot X = A(1)$.

3. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1+x & x \\ 2x & 1+2x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}$.

0,5p a) Arătați că: $A(x) \cdot A(y) = A(x+y+3xy), (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

0,5p b) Determinați $x \in \mathbf{R}$ pentru care $A(x)$ este inversabilă.

1p c) Determinați $x \in \mathbf{R}$, $x \neq -\frac{1}{3}$, știind că inversa matricei $A(x)$ este matricea $A(x)^2$.

1p d) Aflați inversa matricei $A(1)$.

Cap. V. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

BREVIAR TEORETIC

- Forma generală a unui sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

- Definim *matricea sistemului* A, *matricea extinsă* $\overline{A}$, *matricea termenilor liberi* B și *matricea necunoscutelor* X:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\,b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\,b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}\,b_m \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Sistemul are forma matriceală $AX = B$.

Teorema lui *Cramer*. Dacă $m = n$ și $\Delta = \det(A) \neq 0$, atunci sistemul $AX = B$ este compatibil determinat, iar unica sa soluție are componentele $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, (\forall) i = \overline{1,n}$, unde Δ_i se obține înlocuind în Δ coloana i cu coloana termenilor liberi.

Teorema *Kronecker-Capelli*. Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

Teorema lui *Rouche*. Un sistem liniar este compatibil dacă și numai dacă toți minorii caracteristici sunt nuli.

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 60 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx + y + 2z = m + 1 \\ x - y + 3z = 1 \\ 2x + y + mz = 3 \end{cases}$, $m \in \mathbf{R}$.

1p a) Să se determine $m \in \mathbf{R}$, știind că sistemul este compatibil determinat.

2p b) Să se determine $m \in \mathbf{R}$, pentru care sistemul este incompatibil.

2p c) Pentru $m = 2$, să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax + y + (a+1)z = 0 \\ ax - y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

1p a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

1p b) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul admite soluții nenule.

2p c) Pentru $a = 2$, să se determine soluția (x_0, y_0, z_0), astfel încât $4x_0 + 2y_0 + z_0 = 5$.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 100 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 3y + z = m \\ x + 3y + mz = 1 \\ mx + (m+1)y + z = 1 \end{cases}$, $m \in \mathbf{R}$.

0,5p a) Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $(m-1)2m - 1$.

0,5p b) Studiați compatibilitatea sistemului.

1p c) Să se rezolve sistemul pentru $m \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

1p d) Să se rezolve sistemul pentru $m = 1$.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y - z = -1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

0,5p a) Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $2a^2 - 2$.

0,5p b) Studiați compatibilitatea sistemului.

1p c) Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) cu toate componentele întregi.

1p d) Pentru $a = -1$, să se rezolve sistemul.

3. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ay+3z=0 \\ x+3y+az=0 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

0,5p a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

0,5p b) Să se determine $a \in \mathbf{R}$, știind că sistemul are soluții nenule.

1p c) Să se rezolve sistemul pentru $a = -1$.

1p d) Să se rezolve sistemul pentru $a = 3$.

Test de evaluare 3. - (timp de lucru: 60 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+y+z=2 \\ x+y-z=3 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

1p a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$, știind că sistemul are soluția $(-1, 3, -1)$.

1p b) Să se determine $a \in \mathbf{R}$, știind că sistemul are soluție unică.

2p c) Pentru $a = 0$, să se rezolve sistemul.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+y-z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+ay-z=a \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$ și A matricea asociată sistemului.

1p a) Determinați $a \in \mathbf{R}$ pentru care $\det A = 3$.

1p b) Determinați $a \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

1p c) Pentru $a = 0$, să se rezolve sistemul.

2p d) Să se determine $a \in \mathbf{Z} \setminus \{-3, 1\}$ pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0), unde $x_0, y_0, z_0 \in \mathbf{Z}$.

Test de evaluare 4. - (timp de lucru: 100 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+ay+z=1 \\ x-y+2z=a \\ x+y+3z=2 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

0,5p a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$, știind că sistemul are soluție unică.

0,5p b) Pentru $a = 1$, să se rezolve sistemul dat.

1p c) Să se rezolve sistemul pentru $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

1p d) Să se determine $a \in \mathbf{Z}$, știind că $x_0 + y_0 + 2z_0 = 1$, unde (x_0, y_0, z_0) este o soluție a sistemului.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ay+z=2a \\ x+y-z=0 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$ și A matricea asociată sistemului.

0,5p a) Determinați $a \in \mathbf{R}$, știind că sistemul admite soluția $(1, 1, 1)$.

0,5p b) Determinați $a \in \mathbf{R}$, știind că sistemul este cramerian.

1p c) Determinați $a \in \mathbf{R}$, știind că $\det A = a^2 + 1$.

1p d) Să se rezolve sistemul pentru $a = 0$.

3. Se consideră sistemul $\begin{cases} (a+1)x+ay+(a-1)z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ x-y+z=3 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$.

0,5p a) Determinați $a \in \mathbf{R}$, știind că $(1, -2, 0)$ este soluție a sistemului.

0,5p b) Determinați $a \in \mathbf{R}$, știind că sistemul este cramerian.

1p c) Pentru $a = 0$, să se rezolve sistemul dat.

1p d) Aflați $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, știind că $2x_0 + y_0 + z_0 = 1$, unde (x_0, y_0, z_0) este o soluție a sistemului.

CLASA A XI-A * ANALIZĂ *

Cap. I. LIMITE DE ȘIRURI

BREVIAR TEORETIC

Monotonie, mărginire, convergență

Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ se numește *crescător* (*descrescător*) dacă $a_n \leq a_{n+1}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$ (respectiv $a_n \geq a_{n+1}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$). Dacă inegalitățile sunt stricte, șirul se numește strict *crescător* (*descrescător*).

Un șir care este fie crescător, fie descrescător, se numește *monoton*.

Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ se numește *mărginit* dacă există $m, M \in \mathbf{R}$, astfel încât $m \leq a_n \leq M, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Un șir se numește *convergent* dacă are limită finită; în caz contrar, șirul se numește *divergent*. Orice șir convergent este mărginit.

Teorema lui *Weierstrass*: Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Reciproca nu este adevărată.

Operații cu șiruri care au limite

Nedeterminări: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0.

Criterii de existență a limitei unui șir

- *Criteriul cleștelui*: Dacă $x_n \leq a_n \leq y_n, (\forall) n \geq n_0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.
- *Criteriul raportului*: Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un șir cu termeni strict pozitivi. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0,1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in (1,\infty)$ sau $\ell = \infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Dacă $\ell = 1$ nu se poate afirma nimic!
- *Lema Stolz-Cesaro*: Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, iar $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton și nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.
- *Criteriul rădăcinii*: Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir cu termeni strict pozitivi. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Limite remarcabile de șiruri

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & q \in (-1,1) \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q \in (1,\infty) \\ \text{nu există}, & q \in (-\infty,-1] \end{cases} ; \lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} \infty, a > 0 \\ 1, a = 0 \\ 0, a < 0 \end{cases} ; \lim_{n\to\infty} (a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0) =$$

$$= \begin{cases} +\infty, a_p > 0 \\ -\infty, a_p < 0 \end{cases} ; \lim_{n\to\infty} \frac{a_s n^s + a_{s-1} n^{s-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_p n^p + b_{p-1} n^{p-1} + \ldots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0, & s < p \\ \pm\infty, & s > p \\ \frac{a_s}{b_p}, & s = p \end{cases} ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Să se calculeze:

1p a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+n(n+2)}{1\cdot 5+2\cdot 6+\ldots+n(n+4)}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^{n+1}+3^{n-1}}{3\cdot 2^n+3^{n+1}}$.

1p c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+3n+1}+2n-1}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$.

1p e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+n+2}-\sqrt{n^2+2n+5}\right)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+3}{n^2+2n+3}\right)^{n+1}$.

1p g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2+2n+7}}{n}\right)^{n-2}$.

1p h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)^n$.

1p i) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n^2+n+4)-2\ln n)$.

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1\in(0,1)$ și relația $a_{n+1}=\dfrac{2a_n^4+3a_n}{5}, (\forall)\, n\geq 1$.

1p a) Arătați că $a_n\in(0,1), (\forall)\, n\geq 1,\ n\in\mathbf{N}$.

1p b) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

1p c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 100 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Să se calculeze:

1p a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+n^2+3^{n+1}}{n^3-3^{n-1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-\ln n)$.

1p c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\dfrac{n+3}{n}}-\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}}\right)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+5}-n\right)$.

1p e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{C_n^k}{k+2^n}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k+1}{\sqrt{n^4+k^2}}$.

2. Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$ în fiecare dintre situațiile următoare:

1p a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+5}+an+1\right)=b$.

1p b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^2+n+1}{2n+5}-n\right)=b+2$.

1p c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^2+n+5}{n^2+2n+2}\right)^{n+1}=e^{b-1}$.

Cap. II. LIMITE DE FUNCȚII

BREVIAR TEORETIC

Limitele funcțiilor elementare

Fie $f: D \to \mathbf{R}$ o funcție elementară și $x_0 \in D$ un punct de acumulare al lui D.
Atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[4]{x} = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[2k+1]{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[2k+1]{x} = \infty$; $\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0,\ a > 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty,\ a \in (0,1)$; $\lim\limits_{x \searrow 0} \log_a x = -\infty,\ a > 1$; $\lim\limits_{x \searrow 0} \log_a x = \infty,\ a \in (0,1)$;

$\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty,\ a > 1$; $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0,\ a \in (0,1)$; $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = \infty, a > 1$; $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = -\infty,\ a \in (0,1)$.

$\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$; $\lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \searrow 0} \operatorname{ctg} x = \infty$; $\lim\limits_{x \nearrow 0} \operatorname{ctg} x = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$; $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arcctg} x = 0$.

Limite fundamentale

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, (\forall)\, a > 0,\ a \neq 1$;

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, (\forall)\, r \in \mathbf{R}$.

Asimptote

- *Asimptotă orizontală*: Fie $f: D \to \mathbf{R}$ o funcție astfel încât $+\infty$ este punct de acumulare al domeniului. Dreapta $y = \ell$ ($\ell \in \mathbf{R}$) este asimptotă orizontală spre $+\infty$ pentru graficul funcției f dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$. Analog definim noțiunea de asimptotă orizontală spre $-\infty$.
- *Asimptotă oblică*: Fie $f: D \to \mathbf{R}$ o funcție astfel încât $+\infty$ este punct de acumulare al domeniului. Dreapta $y = mx + n$, $m \neq 0$, este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f dacă $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ și $n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$. Analog se definește noțiunea de asimptotă oblică spre $-\infty$. Existența asimptotei orizontale la $+\infty$ implică nestudierea asimptotei oblice la ∞. Analog pentru $-\infty$.
- *Asimptotă verticală*: Fie $f: D \to \mathbf{R}$ o funcție, iar a un punct de acumulare al domeniului. Dreapta $x = a$ este asimptotă verticală la stânga pentru graficul funcției f dacă $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \pm\infty$. Analog se definește noțiunea de asimptotă verticală la dreapta.

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Să se calculeze:

0,5p a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + e^x - 1}{\operatorname{arctg} 3x + \operatorname{tg} 2x}$.

0,5p b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2 + x - 1)}{\ln(2x - 1)}$.

0,5p c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x + 3^x + 4^x - 3}{4^x - 2^x}$.

0,5p d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{\sqrt[3]{2x+1} - 1}$.

1p e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{\cos x}$.

1p f) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

0,5p a) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul lui f.

0,5p b) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^x$.

1p c) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$.

1p d) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^x$.

1p e) Calculați: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$.

1p f) Calculați: $\lim\limits_{x\to 2} (f(x) - 7)^{x-2}$.

3. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \ln \dfrac{x}{x + e}$.

a) Calculați: $\lim\limits_{x\to e} f(x)$.
b) Arătați că dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.
c) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Să se calculeze:

0,5p a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+\sin 2x-\cos x}{x}$.

0,5p b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2+2x-2)+2^x-2}{x^2\cdot\sin(x^2-1)}$.

0,5p c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x-\operatorname{tg}^3 x}{x^5}$.

0,5p d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^3-x)+\operatorname{tg}(x^2-1)}{\sqrt{x^2+3x}-2}$.

0,5p e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+x-1}-\sqrt{2x-1}}{\sin(3x-3)}$.

0,5p f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin 3x-1}{\cos 2x-\frac{1}{2}}$.

2. Să se determine, în funcție de valorile parametrilor reali a și b, următoarele limite:

0,5p a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2}+\sqrt{x^2+1}+ax\right)$.

0,5p b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax^2+bx+2}{x^2+x+1}\right)^x$.

0,5p c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-bx\right)$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$.

0,5p a) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul lui f.

0,5p b) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^x$.

1p c) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}$.

1p d) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\dfrac{f(x)}{x}\right)$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}, f(x)=x\cdot\cos\dfrac{1}{x}$.

0,5p a) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul lui f.

0,5p b) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^x$.

0,5p c) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}x(f(x)-x)$.

5. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-1}$.

a) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul fncției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

c) Calculați: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^{x+3}$.

Cap. III. FUNCȚII CONTINUE

BREVIAR TEORETIC

- Dacă x_0 este punct de acumulare al domeniului D, atunci f este continuă în x_0 dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. O funcție care este continuă în orice punct al domeniului se numește *continuă pe D*. Funcțiile elementare sunt conținue pe domeniile lor de definiție maximale.

Proprietăți ale funcțiilor continue pe un interval

1) *Teorema lui Weierstrass*: O funcție continuă pe un interval compact este mărginită și își atinge marginile.
2) *Lema lui Bolzano*: Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este continuă și $f(a)\cdot f(b)<0$, atunci există $c\in(a,b)$ pentru care $f(c)=0$.
3) Dacă $f: I\to\mathbf{R}$ (unde I este interval) este o funcție continuă pe I, atunci f are *proprietatea lui Darboux* pe I, adică: oricare ar fi $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$ și oricare ar fi numărul c situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, atunci există cel puțin, un punct $x_c\in(x_1,x_2)$ astfel încât $f(x_c)=c$.
4) Dacă $f: I\to\mathbf{R}$ (unde I este interval) este o funcție continuă pe I, atunci mulțimea $J=f(I)$ este un interval.
5) O funcție continuă păstrează semn constant pe orice interval pe care nu se anulează.
6) Dacă $f: I\to J$ (unde I este interval) este o funcție continuă și bijectivă, atunci $f^{-1}: J\to I$ este și ea o funcție continuă.

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 60 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Să se determine valorile parametrului real a, pentru care următoarele funcții sunt continue pe domeniul maxim de definiție:

1p a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax)+\operatorname{tg}2x}{x}, & x>0\\ \sqrt{ax^2+x+a}+2, & x\le 0\end{cases}$.

1p b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(|a|x+1)}{x}, & x>0\\ \dfrac{e^{3x}+1}{x^2+1}, & x\le 0\end{cases}$.

1p c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right), & x<0\\ ax+a, & x\ge 0\end{cases}$.

2. Precizați natura punctelor de discontinuitate pentru următoarele funcții:

1p a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}\sin\frac{2}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$.

1p b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{e^{2x}-1}{x}, x>0\\ 2, x=0\\ \frac{\ln(1-5x)}{2x}, x<0\end{cases}$.

1p c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x^n-1}{x-1}, x>1\\ x^{n+1}+nx-2, x\leq 1\end{cases}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

3. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+\ln x, x\in(0,1)\\ \frac{x^2+x-2}{x-1}+a, x\in[1,\infty)\end{cases}$, $a\in\mathbf{R}$.

1p a) Să se determine $a\in\mathbf{R}$, știind că f este continuă pe $(0,\infty)$.

1p b) Pentru $a=-2$, arătați că ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o rădăcină în $(0,1)$.

1p c) Să se determine ecuația asimptotei oblice.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}, x<1\\ \ln(2x-1)+a, x\geq 1\end{cases}$, $a\in\mathbf{R}$.

0,5p a) Să se determine $a\in\mathrm{R}$, știind că f este continuă în $x_0=1$.

0,5p b) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))^x$.

1p c) Să se calculeze: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

1p d) Pentru $a=2$, arătați că ecuația $f(x)=x$, are cel puțin o soluție în $(3,4)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}, x<0\\ x^2+2x+a, x\geq 0\end{cases}$.

0,5p a) Să se determine $a\in\mathbf{R}$, știind că f este continuă pe $\mathbf{R}$.

0,5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

1p c) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x\right)$.

1p d) Arătați că, pentru $a=1$, ecuația $f(x)=e^x$ are cel puțin o soluție în $(2,3)$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}x^3+\ln x, x\geq 1\\ x^2+x+a, x<1\end{cases}$.

0,5p a) Să se determine $a\in\mathbf{R}$, știind că f este continuă în $x_0=1$.

0,5p b) Calculați: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

1p c) Calculați: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{f(x-1)}\right)^x$.

1p d) Pentru $a=-1$, arătați că ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în $(0,1)$.

Cap. IV. FUNCȚII DERIVABILE

RETINE!

BREVIAR TEORETIC

- Fie $f: D \to \mathbf{R}$ o funcție și $x_0 \in D$ un punct de acumulare al domeniului. Spunem că f are *derivată* în punctul x_0 dacă există limita (în $\overline{\mathbf{R}}$) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, notată cu $f'(x_0)$.
- Dacă *derivata* $f'(x_0)$ există și este finită se spune că f este *derivabilă* în punctul x_0.
- Dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este continuă în x_0.
- Dacă f este derivabilă în x_0, graficul funcției f admite tangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$. Panta tangentei este $f'(x_0)$, iar ecuația sa este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Funcția f este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbf{R}$.

- *Punct unghiular*: este un punct $x_0 \in D$, punct de acumulare pentru D, astfel încât f este continuă în x_0 și are derivate laterale diferite în x_0, cel puțin una finită.
- *Punct de întoarcere*: este un punct $x_0 \in D$, punct de acumulare pentru D, astfel încât f este continuă în x_0 și are derivate laterale în x_0, una egală cu $+\infty$, iar cealaltă cu $-\infty$.

Reguli de derivare:

$(f \pm g)' = f' \pm g'$; $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$;

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$; $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, unde $f(x) = y$.

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 90 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{|x^2 + 4x|}$.

1p a) Să se studieze derivabilitatea funcției.

1p b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $x_0 = -1$.

1p c) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$.

2. Să se determine punctele critice pentru:

1p a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \ln \dfrac{x^2+2}{2x^2+3}$.

1p b) $f: (1, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{e^{3x-2}}{\sqrt{x^2-1}}$.

1p c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$.

3. Să se rezolve ecuația $f''(x) = 0$, pentru:

1p a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x \cdot \ln(x^2 + 2)$.

1p b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 - 2}{e^{2x}}$.

1p c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 2}$.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + 2, & x < 0 \\ \ln(3x + 1) + b, & x \geq 0 \end{cases}$.

1p a) Să se determine valorile parametrilor reali a și b, știind că f este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

0,5p b) Pentru $b = 2$, să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în $x_0 = 1$.

0,5p c) Pentru $a = 3$ și $b = 2$, să se determine coordonatele punctului de pe graficul funcției f, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 6x + 1$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x - 1}$.

1p a) Calculați $f'(x)$ și $f''(x)$.

1p b) Arătați că: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

0,5p c) Calculați: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(3)$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}, f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot (x - 1)$.

0,5p a) Să se calculeze: $f'(x), x \in \mathbf{R}^*$.

0,5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției în $x_0 = 1$.

0,5p c) Să se rezolve în $\mathbf{R}^*$ ecuația $f''(x) = 0$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$.

1p a) Determinați coordonatele punctului de pe graficul lui f în care tangenta la grafic este perpendiculară pe dreapta d: $x - y + 2 = 0$.

1p b) Arătați că $f''(x) > 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

1p c) Determinați ecuațiile asimptotei la graficul lui f.

5. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$.

a) Arătați că: $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{e^x}, x \in \mathbf{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = -1$, situat pe graficul funcției f.

c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $f''(x) = 0$.

Cap. V. TEOREMELE FERMAT, ROLLE, LAGRANGE, L' HOSPITAL

BREVIAR TEORETIC

Teorema lui *Fermat*. Fie $f: D \to \mathbf{R}$ o funcție și x_0 un punct interior lui D. Dacă x_0 este punct de extrem (local) al funcției f și f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Consecință. Dacă $f: I \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval deschis I, atunci punctele de extrem local ale funcției f se găsesc printre zerourile derivatei f' (numite și *puncte critice*).

Teorema lui *Rolle*. Fie o funcție $f: [a,b] \to \mathbf{R}$. Dacă f este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) și $f(a) = f(b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$, astfel încât $f'(c) = 0$.

Consecințe. Fie $f: I \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval deschis I.

1) Între două zerouri consecutive ale funcției f se află cel puțin un zerou al derivatei f'.
2) Între două zerouri consecutive ale derivatei f' se află cel mult un zerou al funcției f.

Teorema lui *Lagrange*. Fie o funcție $f: [a,b] \to \mathbf{R}$. Dacă f este continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b), atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$, astfel încât $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Consecințe.

1) Dacă o funcție derivabilă are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acel interval.
2) Două funcții derivabile care au derivatele egale pe un interval diferă printr-o constantă.
3) Fie f o funcție derivabilă pe un interval I. Dacă $f'(x) > 0, (\forall) x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I. Dacă $f'(x) < 0, (\forall) x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I.
4) Fie o funcție $f: I \to \mathbf{R}$, I interval și $x_0 \in I$. Dacă f este continuă pe I, derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ și există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, atunci f are derivată în x_0 și $f'(x_0) = \ell$.

Regulile lui *L'Hospital*.

- *Cazul* $\frac{0}{0}$. Fie I un interval, x_0 punct de acumulare al lui I și f, g două funcții definite pe $I \setminus \{x_0\}$. Dacă: (i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$; (ii) f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$; (iii) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0, (\forall) x \in I \setminus \{x_0\}$; (iv) există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, atunci există și limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, egală tot cu ℓ.
- *Cazul* $\frac{\infty}{\infty}$. Fie I un interval, x_0 punct de acumulare al lui I și f, g două funcții definite pe $I \setminus \{x_0\}$. Dacă: (i) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$; (ii) f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$; (iii) $g'(x) \neq \neq 0, (\forall) x \in I \setminus \{x_0\}$; (iv) există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, atunci există și limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, egală tot cu ℓ.

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 90 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x+e^{-x+1}$.

1p a) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul lui f.

1p b) Să se determine $a\in\mathbf{R}$, știind că $f(x)\geq a(x-1)+3, (\forall)x\in\mathbf{R}$.

1p c) Folosind șirul lui *Rolle*, să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x)=m, m\in\mathbf{R}$

2p d) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{\frac{1}{\ln x}}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

1p a) Să se calculeze: $f'(x)$ și $f''(x)$.

1p b) Să se arate că: $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}, (\forall)x\in(0,\infty)$.

1p c) Să se arate că: $-\dfrac{1}{1+k^2}\leq f(k+1)-f(k)\leq-\dfrac{1}{1+(k+1)^2}, (\forall)k\in\mathbf{N}$.

1p d) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(f(x+1)-f(x))$.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=x^3-3\ln x$.

0,5p a) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul lui f.

0,5p b) Să se determine $a\in\mathbf{R}$, știind că $f(x)\geq a\cdot\ln x+1, (\forall)x\in(0,\infty)$.

1p c) Să se discute în funcție de $m\in\mathbf{R}$, numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x)=m$.

1p d) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{\frac{1}{\ln x}}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=x^3+\ln x+1$.

1p a) Arătați că f este inversabilă și calculați: $(f^{-1})'(2)$.

1p b) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

0,5p c) Determinați $a\in\mathbf{R}$, știind că: $f(x)\geq a(x-1)+2, (\forall)x\in\mathbf{R}$.

0,5p d) Arătați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică pe $(0,\infty)$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}x^4+ax+2, & x\leq 0\\ \ln(x+1)-b, & x>0\end{cases}$.

0,5p a) Să se determine valorile parametrilor reali a, b, știind că f este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

0,5p b) Să se arate că graficul funcției f nu are asimptotă către $+\infty$.

0,5p c) Să se arate că: $\dfrac{1}{k+2}\leq f(k+1)-f(k)\leq\dfrac{1}{k+1}, (\forall)k\in\mathbf{N}^*$.

0,5p d) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}x(f(x+1)-f(x))$.

1p e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}$.

Cap. VI. ROLUL DERIVATELOR ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

BREVIAR TEORETIC

Monotonia unei funcții derivabile pe un interval

Fie f o funcție derivabilă pe un interval I. Dacă $f'(x) > 0, (\forall) x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I. Dacă $f'(x) < 0, (\forall) x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I.

Convexitate/concavitate

Fie f o funcție de două ori derivabilă pe un interval I. Dacă $f''(x) \geq 0, (\forall) x \in I$, atunci f este convexă pe I. Dacă $f''(x) \leq 0, (\forall) x \in I$, atunci f este concavă pe I.

Puncte de inflexiune

Fie $f: D \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe D și $x_0 \in D$. Dacă există $a, b \in D$, astfel încât *i)* $a < x_0 < b$; *ii)* $f''(x_0) = 0$; *iii)* $f'' < 0$ pe (a, x_0) și $f'' > 0$ pe (x_0, b) sau invers (adică $f'' > 0$ pe (a, x_0) și $f'' < 0$ pe (x_0, b)), atunci x_0 este *punct de inflexiune* pentru f.

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 60 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

1p a) Să se calculeze: $f'(x), x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

1p b) Să se arate că: $f(x) \geq -1, (\forall) x > -1$.

1p c) Să se determine intervalele de convexitate și concavitate ale funcției f.

1,5p d) Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x) = m$, $m \in \mathbf{R}$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$.

1p a) Să se studieze monotonia funcției f.

1p b) Să se arate că: $f(x) \geq \ln 2, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

1p c) Să se determine punctele de inflexiune și intervalele de convexitate ale funcției f.

1,5p d) Arătați că ecuația $f(x) = 1$ are exact două soluții reale.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 100 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{2\}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{e^x}{x-2}$.

1p a) Să se studieze monotonia funcției f.
1p b) Să se arate că: $f(x)\geq e^3, (\forall)x>2$.
1p c) Să se determine intervalul de convexitate și concavitate ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}, f(x)=(x-2)\cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

1p a) Să se studieze monotonia funcției f.
1p b) Să se arate că: $f(x)\geq -\frac{1}{e}, (\forall)x>0$.
1p c) Să se determine intervalul de convexitate și concavitate ale funcției f.

3. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.

0,5p a) Determinați punctele de extrem local ale funcției.
0,5p b) Determinați punctele de inflexiune ale funcției.
1p c) Arătați că: $f(x)\geq \ln(2e), (\forall)x>0$.
1p d) Arătați că ecuația $f(x)=2$ are exact două rădăcini reale.

Test de evaluare 3. - (timp de lucru: 100 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}2x+a, x<2\\ 0, x=2\\ \frac{x-b}{2x+5}, x>2\end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.

1p a) Determinați ecuațiile asimptotelor spre $+\infty$ la graficul funcției f.
1p b) Determinați numerele reale a și b pentru care funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$.
1p c) Pentru $a-4$, studiați în funcție de b monotonia funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.

1p a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbf{R}^*$.
1p b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe $(0,2]$.
1p c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}}\leq 3e^{\sqrt{2}}$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1p a) Arătați că $f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, x\in\mathbf{R}$.
1p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
1p c) Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.

TESTE DE SIMULARE BACALAUREAT

TESTUL 1
(Matematică - informatică)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 3 - 2i$. Calculați $z\bar{z} + z + \bar{z}$, unde $\bar{z}$ este..... lui z.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - (m+1)x + m$ este tangent axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $3\log_x 2 + \log_2(2x) = 5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 13.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 8\sqrt{3}$ și $m(\hat{A}) = 120°$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Arătați că, dacă $(2\sin x + \cos y)^2 + (2\cos x - \sin y)^2 = 5$ și $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} x & y & 4 \\ x^2 & y^2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

5p a) Arătați că $\Delta(-1, 1)$ este pătrat perfect.

5p b) Arătați că $\Delta(x,y) = (x-y)(2\cdot x^2 + xy - 4x - 4y - 3)$.

5p c) Demonstrați că numărul $\Delta(m,n)$ este par dacă m, n au aceași paritate $(\forall) m, n \in \mathbf{N}$.

2. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1+3a & 0 & 3a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1-a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbf{R}$.

5p a) Să se calculeze $\det A(0)$.

5p b) Să se determine $x \in \mathbf{R}$, pentru care $A(a) \cdot A(x) = A(x)$, oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$.

5p c) Să se determine inversa matricei $A(3)$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}, f_n: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2 - 2, (\forall) n \in \mathbf{N}, n \geq 3$, oricare $x \in \mathbf{R}, f_n(x) = xf_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)$. Se consideră cunoscute formulele $2\cos a \cos a = \cos(a+b) + \cos(a-b), (\forall) a, b \in \mathbf{R}$ și $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

5p a) Să se calculeze $f_2(1)$.

5p b) Să se arate că $f_2(2\cos t) = 2\cos 2t, (\forall) t \in \mathbf{R}$.

5p c) Dacă pentru $r \in \mathbf{Q}$, $\cos r\pi \in \mathbf{Q}$, să se demonstreze că $\cos r\pi \in \left\{-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}, x < 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x - 1} + a, x \geq 1 \end{cases}$ unde a este număr real.

5p a) Calculați: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

5p b) Determinați numărul real a pentru care funcția f este continuă în punctul $x = 1$.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x))^x$.

TESTUL 2

(Matematică - informatică)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați suma numerelor întregi din intervalul $(-2019, 2019)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^{2019}-1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=x-2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie multiplu al unui număr prim format dintr-o cifră.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-3)$ și $B(-3,4)$. Scrieți ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC în care $AB=8\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{2}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3^x & 9^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p b) Demonstrați că $\det(A(x))=(3^x-1)(3^x-x\cdot 3^x+x)$.

5p c) Calculați $A(1)+A(2)+\ldots+A(2019)$.

2. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & y & y^2\\ 1 & 3 & 3^2\end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p a) Arătați că $D(x,x)=0$, pentru orice număr real x.

5p b) Arătați că $D(x,y)=(y-x)(x-3)(y-3)$.

5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $D(3^x,1)=0$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-2,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x^2+ax+10}{x+2}$, $a\in\mathbf{R}$.

5p a) Pentru $a=7$, calculați $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$.

5p b) Determinați numărul real a, pentru care dreapta de ecuație $y=x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că pentru orice număr real a, funcția f nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}x-6, & x\le 2\\ x^2-a, & x>2\end{cases}$, $a\in\mathbf{R}$.

5p a) Determinați numărul a, știind că f este continuă în $x=2$.

5p b) Pentru $a=8$, rezolvați ecuația $f(x)=0$.

5p c) Pentru $a=8$, stabiliți semnul funcției f.

TESTUL 3
(Științe ale Naturii)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real x, știind că numerele $x+3$, 8, $3x+1$ sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-4(m-1)x+4m^2-4m=0$. Determinați numărul real m, $m\neq 0$, $m\neq 1$ pentru care $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x}=27\cdot 3^{-x}$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca alegând una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $M=\{1,2,3,\ldots,10\}$ aceasta să conțină elementul 1.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$ și $C(6,a)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Arătați că $\sqrt{15}\operatorname{tg}x+1=0$, știind că $\sin x=\frac{1}{4}$, $\sin x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}\frac{x+2}{3} & \frac{x-2}{3}\\ \frac{x-2}{3} & \frac{x+2}{3}\end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

5p a) Calculați: $\det(A(9))$.

5p b) Demonstrați că $\det A(x)\cdot\det A(y)=\det(A(x)\cdot A(y))$.

5p c) Demonstrați că $\det A(1)+\det A(2)+\ldots+\det A(2018)$ nu se divide cu 9.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Calculați: $3A-2B$.

5p b) Arătați că $(A+I_2)(B-I_2)=4\begin{pmatrix}5 & 0\\ 7 & 0\end{pmatrix}$.

5p c) Demonstrați că dacă $x\in M_2(\mathbf{R})$, astfel încât $x\cdot A=A\cdot x$ și $xB=Bx$, atunci $x\cdot y=y\cdot x$, pentru orice $y\in M_2(\mathbf{R})$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-2,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+10}{x+2}$, unde a este un număr real.

5p a) Pentru $a=5$, calculați: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

5p b) Determinați numărul real a, pentru care dreapta de ecuație $y=x+5$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că, oricare ar fi numărul real a, funcția f nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{3mx}{1-x}, & x\in(-\infty,-2)\\ 3x+6-2m, & x\in[-2,\infty)\end{cases}$ unde m este număr real.

5p a) Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$, pentru orice număr real m.

5p b) Pentru $m=2$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=0$.

5p c) Determinați numărul real m pentru care $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(f(x)-3x)$.

TESTUL 4

(Științe ale Naturii)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real x, știind că numerele $2x+5$, 9, $x+1$ sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Fie x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2-(m+1)x+6=0$. Determinați $m \in \mathbf{R}$ pentru care $x_1^2+x_2^2=$ $=13$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $2^x+2^{x+1}=6$.

5p **4.** Fie $M=\{1,3,5,7,\ldots,2017\}$. Determinați probabilitatea ca alegând un element din mulțimea M, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$; $B(3,5)$; $C(4,6)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$. Calculați $\cos x$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+3 & x-3 \\ x-2 & x+2 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați: $\det(A(2018))$.

5p b) Demostrați că $\det(A(x)) \cdot \det(A(y)) = 10 \det(A(x \cdot y))$.

5p c) Calculați $\det M$, unde $M=A(1)+A(2)+\ldots+A(2018)$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați: $\det(A+B)$.

5p b) Calculați: A^n, $n \geq 2$.

5p c) Calculați: $[(A+B)^n]$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:(-2,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+3x+a}{x+2}$, $a \in \mathbf{R}$.

5p a) Pentru $a=2$, calculați: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(x)$.

5p b) Determinați $a \in \mathbf{R}$, pentru care dreapta de ecuație $y=x+5a$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că oricare $a \in \mathbf{R}$, f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2. Fie $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{mx}{x^2+2}, & x<2 \\ \dfrac{2x+1}{x^2}, & x \geq 2 \end{cases}$, $m \in \mathbf{R}$.

5p a) Determinați $m \in \mathbf{R}$ pentru care f este continuă în punctul $x=2$.

5p b) Calculați: $\lim\limits_{x \to \infty} (x+1)f(x)$.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

TESTUL 5
(Tehnologic)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se determine valoarea lui 3^x dacă $|x-1|=0$.

5p **2.** Fie funcțiile $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x)=x+1, g(x)=x-1$. Să se calculeze $(f \circ g)(x)-(g \circ f)(x)$.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3^{x-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$.

5p **4.** Fie funcția $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x)=\log_3 x$. Să se calculeze suma

$$S=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\ldots+f\left(\frac{26}{27}\right).$$

5p **5.** Să se determine parametrul real m pentru care triunghiul ABC are aria egală cu 12, unde $A(1,m)$, $B(1,1)$ și $C(5,3)$.

5p **6.** Fie triunghiul ABC cu laturile $AB=\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{3}$ și $AC=1$. Să se calculeze $\cos A$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $a,b,c,d \in \mathbf{R}$.

5p a) Să se calculeze A^2.

5p b) Să se arate că $A^2=(a+d)\cdot A-(ad-bc)\cdot I_2$.

5p c) Dacă $a+d \neq 0$ și $x \in M_2(\mathbf{R})$, astfel încât $A^2 \cdot x = x \cdot A^2$, atunci să se demonstreze că $A \cdot x = x \cdot A$.

2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2^x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați: $A(1)-A(0)$.

5p b) Determinați inversa matricei $A(1)$.

5p c) Arătați că $A(x)\cdot A(y) \neq A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}$.

5p a) Arătați că $f(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}$.

5p b) Determinați ecuația simptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty} 2018x^2 \cdot f(x)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x)=\begin{cases} 2x^2-x+a, & x \leq 0 \\ \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}, & x>0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p a) Caculați $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

5p b) Determinați numărul real a pentru care funcția f este continuă în punctu $x=0$.

5p c) Aflați valorile lui a pentru care ecuația $f(x)=0$ are două soluții în intervalul $(-\infty,0]$.

TESTUL 6
(Tehnologic)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{30}{64}=\frac{1}{4}$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{x+4}=3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,\ldots,100\}$ acesta să fie divizibil prin 13.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,2)$ și $N(3,4)$. Determinați lungimea segmentului MN.

5p **6.** Arătați că $\sin x=\frac{5}{13}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{12}{13}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $\det A=-2$.

5p b) Arătați că $A+B=5C$.

5p c) Demonstrați că $AB+BA+4I_2=-25C$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pentru fiecare număr real x, se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & x\\ 2 & -1 & x\\ x & x & 2\end{pmatrix}$ și se notează determinantul matricei $A(x)$ cu $\Delta(x)$.

5p a) Calculați: $\Delta(1)$.

5p b) Arătați că $\Delta(x)=6(x^2-1)$, pentru orice număr real x.

5p c) Determinați inversa matricei $A(0)$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=4x^3+2x^2-6$.

5p a) Arătați că fracția f este continuă în punctul $x_0=1$.

5p b) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}3x^2+mx+2, & x\le e\\ x+2\ln x, & x>e\end{cases}$.

5p a) Să se determine parametrul real m, pentru care funcția are limită în punctul $x_0=e$.

5p b) Aflați valorile reale ale lui m, pentru care ecuația $f(x)=0$ are o rădăcină în intervalul $(-1,0)$.

5p c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

TESTE FINALE

Testul 1. - (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 punct.

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Fie permutarea $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze σ^2, σ^3.

5p **2.** Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, calculați A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **3.** Se consideră matricele: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.Să se arate că $A \cdot B = B \cdot A$.

5p **4.** Folosind proprietățile determinanților, să se calculeze: $d = \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$.

5p **5.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $\begin{vmatrix} x+6 & x & x \\ x & x+6 & x \\ x & x & x+6 \end{vmatrix}$.

5p **6.** Să se arate că matricea A este inversabilă și determinați inversa ei, unde: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați $A \cdot B$ și $B \cdot A$.

5p b) Calculați A^n și $B^n, n \in \mathbf{N}^*$.

5p c) Calculați C^n, unde $C = 2 \cdot A + 3 \cdot B$.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + mz = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$, $m \in \mathbf{R}$.

5p a) Determinați $m \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul admite soluții nenule.

5p b) Pentru $m = 1$, să se determine inversa matricei sistemului.

5p c) Pentru $m = 0$, determinați soluția nenulă (x_0, y_0, z_0) a sistemului care verifică $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 35$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + 3, x < 0 \\ \ln(3x - 1) + b, x \geq 0 \end{cases}$ unde $a, b \in \mathbf{R}$.

5p a) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care funcția f este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

5p b) Dacă $a = 3$, determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-1, -1)$.

5p c) Pentru $b = 3$, să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 \cdot \ln x$.

5p a) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.

5p b) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției.

5p c) Să se arate că $f(x) \geq -\frac{1}{2e}, (\forall) x \in (0, \infty)$.

Testul 2. - (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 punct.

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră permutările $\sigma, \tau, a \in S_4$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & i & 2 & 3 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se rezolve în S_4, următoarea ecuație: $\sigma \cdot x = \tau$.

5p **2.** Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, calculați A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

5p **3.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Să se calculeze A^n și $B^n, n \in \mathbf{N}^*$.

5p **4.** Demonstrați că funcția $f: (0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \ln x + 3^x$ este bijectivă.

5p **5.** Arătați că ecuația $3^x - \cos x - 3 = 0$ are soluții în intervalul $(0, \pi)$.

5p **6.** Să se arate că matricea A este inversabilă și să se determine inversa ei, unde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}$.

5p a) Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y), (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

5p b) Să se calculeze $A(1) + A(2) + A(3) + \ldots + A(2018)$.

5p c) Să se calculeze $(A(x))^n, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

2. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}$.

5p a) Să se calculeze $\det A(x)$.

5p b) Arătați că $A(n)$ este inversabilă, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

5p c) Calculați inversa matricei $A(1)$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \operatorname{arctg} 2x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$ și $f''(x)$.

5p b) Arătați că pentru orice $x \in \mathbf{R}_+^*$ are loc: $\frac{2}{1+4(x+1)^2} \leq f(x+1) - f(x) \leq \frac{2}{1+4x^2}$.

5p c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} x^2(\operatorname{arctg}(2x+2) - \operatorname{arctg} 2x)$.

2. Se consideră $f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}, f(x) = (x-6) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

5p a) Studiați monotonia funcției f și arătați că ecuația $f(x) = 1$ are soluție unică în $(0,\infty)$.

5p b) Să se arate că $f(x) \geq -\frac{4}{\sqrt{e}}, (\forall) x \in (0,\infty)$.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

Testul 3. - (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 punct.

Subiectul I (30 de puncte)

5p 1. Se consideră permutarea $\sigma \in S_6, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine numărul elementelor mulțimii $H = \{\sigma^n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.

5p 2. Se consideră matricea $A \in M_3(\mathbf{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2m+1 \\ 2 & m & 1 \\ -1 & 1 & m \end{pmatrix}$. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ pentru care matricea este inversabilă.

5p 3. În sistemul (xOy), se consideră punctele $A_n(n^2, n^2+n+1), (\forall) n \geq 1$. Să se arate că aria triunghiului $A_m A_n A_p$ este număr natural pentru orice $m \neq n \neq p \neq m \in \mathbf{N}$.

5p 4. Arătați că funcția $f: [1, \infty) \to [4, \infty), f(x) = 2^x + x^2 - 2x + 3$ este bijectivă.

5p 5. Arătați că ecuația $\ln x = -x^4 + 11$ are soluții în $(0, 2)$.

5p 6. Într-un sistem (xOy), se consideră punctele $A(2,3)$, $B(1,4)$ și $C(m, m-1)$. Să se determine $m \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele să fie coliniare.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} -mx + y + z = -1 \\ x - my + z = -1 \\ x + y - mz = m \end{cases}, m \in \mathbf{R}$.

5p a) Calculați determinantul matricei sistemului.

5p b) Studiați compatibilitatea sistemului.

5p c) Pentru $m = 2$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 9$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+4 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}$.

5p a) Arătați că $\det A = a, (\forall) a \in \mathbf{R}$.

5p b) Determinați inversa matricei A, pentru $a = 1$.

5p c) Pentru $a = 1$, determinați matricea $X \in M_{3,1}(\mathbf{R})$, știind că $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră $f: \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}, f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$.

5p a) Să se determine $\operatorname{Im} f$ și intervalele de convexitate ale funcției f.

5p b) Să se arate că $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}, (\forall) x \in [0, \infty)$.

5p c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 (f(x+1) - f(x))$.

2. Se consideră $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

5p a) Să se arate că f este convexă pe $\mathbf{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} f(x)\right)$.

5p c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$.

CLASA A XII-A * ALGEBRĂ *

Cap. I. STRUCTURI ALGEBRICE

BREVIAR TEORETIC

1. ***Legi de compoziție. Proprietăți***

Dacă A este o mulțime nevidă, se numește *lege de compoziție* sau *operație internă* pe A orice funcție $* : A \times A \to A$.

O submulțime nevidă H a mulțimii A se numește *parte stabilă* a lui A în raport cu operația " $*$ " dacă

(D): $(\forall) x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

Se pot studia următoarele *proprietăți* ale unei legi de compoziție definite pe o mulțime A:

(A): Operația " $*$ " se numește *asociativă* dacă și numai dacă

$$x * (y * z) = (x * y) * z, (\forall) x, y, z \in A.$$

(C): Operația " $*$ " se numește *comutativă* dacă și numai dacă $x * y = y * x, (\forall) x, y \in A$.

(N): Spunem că operația " $*$ " admite element neutru dacă și numai dacă există $e \in A$ astfel încât $x * e = e * x = x, (\forall) x \in A$.

În acest caz e se numește *element neutru* al operației.

(S): Un element $x \in A$ se numește *simetrizabil* în raport cu operația " $*$ " dacă și numai dacă există $x' \in A$, astfel încât $x * x' = x' * x = e$.

În acest caz elementul x' se numește *simetricul lui* x în raport cu operația.

2. ***Principalele structuri algebrice***

- **Monoid**

Perechea $(M, *)$ se numește *monoid* dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile (D), (A), (N) (axiomele monoidului), pentru toate elementele mulțimii M.

Dacă în plus, operația " $*$ " este și comutativă, atunci $(M, *)$ poartă numele de *monoid comutativ*. Elementele simetrizabile ale unui monoid se numesc *unități ale monoidului*. Mulțimea elementelor simetrizabile ale monoidului $(M, *)$ se notează $U(M)$.

- **Grup**

Perechea $(G, *)$ se numește *grup*, dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile (D), (A), (N), (S) (axiomele grupului), pentru toate elementele mulțimii G.

Dacă, în plus, operația " $*$ " este comutativă, atunci $(G, *)$ se numește *grup comutativ* sau *grup abelian*.

- **Subgrup**

O submulțime nevidă $H \subseteq G$ se numește *subgrup* al lui G dacă și numai dacă $(H, *)$ este grup.

Dacă $H \subseteq G$, $H \neq \varnothing$ și sunt îndeplinite condițiile:

$$i)\ (\forall) x, y \in H \Rightarrow x * y \in H,\ ii)\ (\forall) x \in H \Rightarrow x' \in H,$$

atunci H este subgrup al lui G.

Dacă $H \subseteq G$, $H \neq \varnothing$ și este îndeplinită condiția: $(\forall) x, y \in H \Rightarrow x * y' \in H$,

atunci H este subgrup al lui G.

• **Morfism de grupuri**

Fie $(G_1,*)$ și $(G_2,\circ)$ două grupuri. O funcție $f: G_1 \to G_2$ se numește *morfism de grupuri* dacă și numai dacă $(\forall)x,y \in G_1, f(x*y)=f(x)\circ f(y)$.

Dacă, în plus, f este bijectivă, atunci f se numește *izomorfism de grupuri*. În acest caz grupurile G_1 și G_2 se numesc grupuri izomorfe și notăm $G_1 \simeq G_2$.

Dacă $(G_1,*)$, $(G_2,\circ)$ sunt grupuri și $f: G_1 \to G_2$ este un morfism de grupuri, atunci:

i) $f(e_1)=e_2$, unde e_1 și e_2 sunt elementele neutre ale celor două grupuri, respectiv.

ii) $f(x')=(f(x))', (\forall)x \in G_1$, unde x' este simetricul lui x în G_1 și $(f(x))'$ este simetricul lui $f(x)$ în G_2.

Ordinul unui element x al unui grup $(G,\cdot)$ este cel mai mic număr natural nenul k cu proprietatea că $x^k = e$. Ordinul grupului $(G,\cdot)$ este egal cu numărul elementelor mulțimii finite G.

• **Inel**

Fie $A \neq \varnothing$. Tripletul $(A,*,\circ)$ se numește *inel* dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile (axiomele inelului).

*i.*1) $(A,*)$ este grup abelian.

*i.*2) $(A,\circ)$ este monoid.

*i.*3) Operația " $\circ$ " este distribuitivă față de operația " $*$ ", adică:

$x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$ și $(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x)$, pentru oricare $x,y,z \in A$.

Dacă, în plus, legea " $\circ$ " este comutativă, $(A,*,\circ)$ se numește *inel comutativ*. Elementul neutru al operației " $*$ " se notează 0_A și elementul neutru al operației " $\circ$ " se notează 1_A.

Elementele $x,y \in A$ se numesc divizori ai lui 0 dacă $x,y \neq 0_A$ și $x\circ y = 0_A$.

Un inel comutativ cu cel puțin două elemente, fără divizori ai lui 0, se numește *domeniu de integritate*.

• **Corp**

Tripletul $(A,*,\circ)$ se numește *corp*, dacă $(A,*,\circ)$ este inel, $0_A \neq 1_A$ și oricare ar fi $x \in A\setminus\{0_A\}$ este simetrizabil în raport cu operația " $\circ$ ". Dacă, în plus, operația " $\circ$ " este comutativă, $(A,*,\circ)$ se numește *corp comutativ*. Corpurile nu au divizori ai lui 0.

• **Morfisme de inele (corpuri)**

Fie $(A_1,*,\circ)$ și $(A_2,\perp,\top)$ două inele. O funcție $f: A_1 \to A_2$ se numește *morfism de inele* dacă și numai dacă:

1) $f(x*y)=f(x)\perp f(y), (\forall)x,y \in A_1$.

2) $f(x\circ y)=f(x)\top f(y), (\forall)x,y \in A_1$.

3) $f(1_{A_1})=1_{A_2}$.

Dacă $(A_1,*,\circ)$ și $(A_2,\perp,\top)$ sunt corpuri, f se numește *morfism de corpuri*. Dacă, în plus, f este bijectivă, atunci poartă numele de izomorfism de inele (corpuri).

3. *Inelul claselor de resturi modulo n.*

Pentru oricare $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ și oricare $a \in \mathbf{Z}$ se notează cu $a \bmod n$ restul împărțirii lui a la n și, pentru $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, $\hat{k} = \{a \in \mathbf{Z} \mid a \bmod n = k\}$.

Inelul claselor de resturi modulo n este tripletul $(\mathbf{Z}_n,+,\cdot)$ unde $\mathbf{Z}_n = \{\hat{0},\hat{1},\ldots,\widehat{n-1}\}$ și operațiile sunt definite prin $\hat{a}+\hat{b}=\widehat{a+b}, \hat{a}\cdot\hat{b}=\widehat{a\cdot b}$, pentru oricare $\hat{a},\hat{b} \in \mathbf{Z}_n$.

Elementul $\hat{a}$ este inversabil în $\mathbf{Z}_n$, dacă și numai dacă $(a,n)=1$, deci $(\mathbf{Z}_n,+,\cdot)$ este corp dacă și numai dacă n este prim.

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Pe $\mathbf{R}$ definim legea de compoziție $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

0,75p a) Arătați că: $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$

0,75p b) Demonstrați că legea "$\circ$" este asociativă.

0,75p c) Rezolvați ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 2017 ori}} = -4$.

2.

0,75p a) Demonstrați că $(\mathbf{Z}_{12}, \cdot)$ este monoid comutativ.

0,75p b) Determinați mulțimea unităților acestui monoid.

0,75p c) În $\mathbf{Z}_{12}$ rezolvați ecuația $\hat{3}x + \hat{2} = \widehat{11}$.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ și mulțimea $M = \{X(t) = I_3 + t \cdot A \mid t \in \mathbf{R}\}$.

0,75p a) Arătați că $A^2 = 3A$ și că $X(m) \cdot X(n) = X(m + n + 3mn), (\forall) m.n \in \mathbf{R}$.

0,75p b) Fie $G = M - \left\{X\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$. Arătați că toate elementele lui G sunt simetrizabile în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

0,75p c) Calculați $X\left(-\frac{2017}{3}\right) \cdot X\left(-\frac{2016}{3}\right) \cdot X\left(-\frac{2015}{3}\right) \cdot \ldots \cdot X\left(\frac{2017}{3}\right)$.

4. Pe mulțimea $K = (0, \infty)$ definim legile de compoziție $x * y = x \cdot y$ și $x \circ y = x^{\ln y}$.

0,75p a) Calculați $x \circ y - e^{\ln x \cdot \ln y}$ pentru $x, y > 0$.

0,75p b) Arătați că $(K, *, \circ)$ este corp comutativ.

0,75p c) Demonstrați că $f: \mathbf{R} \to (0, \infty), f(x) = e^x$ este un izomorfism între corpul $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ cu corpul de la punctul b).

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Pe $\mathbf{R}$ definim legea: $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

0,75p a) Determinați elementul neutru.

0,75p b) Determinați mulțimea $U = \{x \in \mathbf{R} \mid x$ simetrizabil în raport cu legea $*\}$.

0,75p c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\left(\log_2 x\right) * \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) = -11$.

2. Fie $G = (-3, 3)$ și $x \circ y = \frac{9x + 9y}{9 + xy}, (\forall) x, y \in G$.

0,75p a) Arătați că G este parte stabilă în raport cu operația "$\circ$".

0,75p b) Arătați că $f: G \to (0,\infty), f(x) = \frac{3+x}{3-x}$ este un izomorfism de grupuri de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $((0,+\infty),\cdot)$.

0,75p c) Arătați că $g: G \to (0,\infty)$, $g(x) = \ln f(x)$ este un izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ și $(\mathbf{R},+)$ unde f este izomorfismul de la punctul b).

3. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție: $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

0,75p a) Să se arate că: $x * y = (x-5)(y-5) + 5$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

0,75p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $3^x * 3^x = 21$.

0,75p c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea "$*$".

4. Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_3)$.

0,75p a) Determinați A^{-1}.

0,75p b) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_3)$ ecuația: $AX = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

0,75p c) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_3)$ ecuația: $X^2 = A$.

Test de evaluare 3. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21.$$

0,75p a) Arătați că $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice numere reale x și y.

0,75p b) Arătați că $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 = 3$.

0,75p c) Determinați numerele reale x, pentru care $x \circ x \circ x = x$.

2. Pe $\mathbf{R}$ definim legea "$*$" astfel: $x * y = 2xy - 3x - 3y + 6$.

0,75p a) Demonstrați că $x * y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$.

0,75p b) Arătați că $\left(\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}, *\right)$ este grup abelian.

0,75p c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $x * x * x = 1$.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

0,75p a) Să se calculeze A^2, A^3, A^4.

0,75p b) Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că $A^n = I_3$, dacă și numai dacă 4 divide pe n.

0,75p c) Fie $G = \{A^n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$. Să se arate că G împreună cu operația de înmulțire a atricelor formează un grup comutativ cu 4 elemente.

4. Se consideră inelul $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbf{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

0,75p a) Rezolvați în $\mathbf{Z}_6$ ecuația $\hat{3}x + \hat{2} = \hat{5}$.

0,75p b) Determinați mulțimea valorilor funcției $f: \mathbf{Z}_6 \to \mathbf{Z}_6, f(x) = x^3 - x$.

0,75p c) Determinați numărul elementelor mulțimii $H = \{x^{10} \mid x \in \mathbf{Z}_6\}$.

Test de evaluare 4. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Pe mulțimea $G=(0,1)$, definim legea $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1},(\forall)x,y\in G$.

0,75p a) Să se determine elementul neutru în raport cu legea "$\circ$".

0,75p b) Știind că $(G,\circ)$ este grup abelian, arătați că funcția $f:(0,1)\to(0,\infty),f(x)=\dfrac{x}{1-x}$, este un izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ și $((0,\infty),\cdot)$.

0,75p c) Să se calculeze $\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\ldots\circ\frac{1}{n}$, pentru orice $n\in\mathbf{N},n\geq 2$.

2. Pe $\mathbf{R}$, definim legea $x\circ y=5xy-15x-15y+48,(\forall)x,y\in G$.

0,75p a) Să se arate că $x\circ y=5(x-3)(y-3)+3,(\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

0,75p b) Să se calculeze $(-2014)\circ(-2013)\circ\ldots\circ(2013)\circ(2014)$.

0,75p c) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $x\circ x\circ x\circ x=128$.

3. Pe mulțimea $G=(-1,\infty)$ definim legea $x\circ y=x+y+xy,(\forall)x,y\in G$.

0,75p a) Arătați că $x\circ y=(x+1)(y+1)-1,(\forall)x,y\in G$.

0,75p b) Arătați că $(G,\circ)$ este grup abelian.

0,75p c) Arătați că pentru $x\in G$, avem $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{n\text{ ori}}=(x+1)^n-1,(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

4. Să se rezolve sistemele:

2,25p a) $\begin{cases}\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{3}\\ \hat{2}x+\hat{4}y=\hat{0}\end{cases}$ în $\mathbf{Z}_6$. b) $\begin{cases}x+y=\hat{1}\\ x^2+y^2=\hat{1}\end{cases}$ în $\mathbf{Z}_4$. c) $\begin{cases}x+y+\hat{2}z=\hat{0}\\ x+\hat{2}y+z=\hat{5}\\ \hat{2}x+y+z=\hat{5}\end{cases}$ în $\mathbf{Z}_6$.

Test de evaluare 5. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 0 & a-1\\ 0 & 1 & 0\\ a-1 & 0 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1p a) Calculați: $A(0)+A(2)$.

1p b) Arătați că $A(a)A(b)=A(2ab-a-b+1)$, pentru orice numere reale a și b.

1p c) Arătați că: $A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A\left(\frac{3}{2}\right)\cdot A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție comutativă $x*y=x+y-5$.

1p a) Arătați că $2*(-2)=2014*(-2014)$.

1p b) Verificați dacă legea "$*$" este sociativă.

1p c) Calculați: $(-4)*(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3*4$.

3. Fie mulțimea $M\left\{=A(x)\mid A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 3^x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},x\in\mathbf{R}\right\}$.

1p a) Arătați că M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor, "$\cdot$".

1p b) Arătați că $(M,\cdot)$ este grup.

1p c) Calculați $A(x)^n$, unde $n\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{R}$.

Cap. II. POLINOAME

BREVIAR TEORETIC

Teorema împărțirii cu rest

Dacă $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$, atunci există $q, r \in K[X]$, unice astfel încât

$$f = g \cdot q + r \text{ și grad } r < \text{grad } g.$$

Divizibilitate

Spunem că g divide f dacă există $h \in K[X]$, astfel încât $f = g \cdot h$. (Restul împărțirii lui f la g este polinomul nul).

Rădăcini multiple

Dacă $a \in K$, $g = X - a$ divide f dacă și numai dacă $f(a) = 0$ (*Bezout*) $a \in K$ se numește rădăcină multiplă de ordin p ($p \in \mathbf{N}^*$) dacă $(X-a)^p \mid f$ și $(X-a)^{p+1} \mid f$.

Un polinom $f \in \mathbf{C}[X]$ de grad n are exact n rădăcini complexe.

Polinoame ireductibile

Dacă $f \in K[X]$, spunem că f este reductibil peste k dacă există $g, h \in K[X]$, cu grad $g \geq 1$, grad $h \geq 1$, astfel încât $f = g \cdot h$. În caz contrar, spunem că f este ireductibil peste K.

Polinoamele ireductibile peste $\mathbf{C}$ sunt cele de gradul I, iar polinoamele ireductibile peste $\mathbf{R}$ sunt cele de gradul I și cele de gradul al II-lea cu $\Delta < 0$.

Relațiile lui Viete

- **Pentru ecuația de gradul doi.**

Dacă $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ sunt rădăcini ale ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbf{C}$, atunci:

$$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ S_2 = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

- **Pentru ecuația de gradul trei.**

Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$ sunt rădăcini ale ecuației $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, atunci:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a}{b},\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a},\ S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}.$$

- **Pentru ecuația de gradul patru.**

Dacă $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$ sunt rădăcini ale ecuației

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c, d, e \in \mathbf{C}$, atunci:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a};\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_3x_4 = \frac{c}{a};$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a};\ S_4 = x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}.$$

Cazuri particulare

Dacă un polinom nenul $f \in \mathbf{R}[X]$ are rădăcina $a \in \mathbf{C}$, atunci și $\bar{a}$ este rădăcină pentru f, cu același ordin de multiplicitate ca și a. Dacă un polinom nenul $f \in \mathbf{Q}[X]$ are rădăcina $a = a + b\sqrt{d}$, unde $a, b, d \in \mathbf{Q}$, $d > 0$, $\sqrt{d} \notin \mathbf{Q}$, atunci $a - b\sqrt{d}$ este rădăcină pentru f, cu aceleași ordin de multiplicitate ca și $a + b\sqrt{d}$. Dacă un polinom nenul $f = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbf{Z}[X]$ admite rădăcina $a = \frac{p}{q}$ cu $p \cdot q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$, atunci $p \mid a_0$ și $q \mid a_n$.

Observație: Rădăcinile întregi ale unui polinom cu coeficienți întregi se regăsesc printre divizorii termenului liber.

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Considerăm polinomul $f=X^4+aX^2-(a+1)X+1$, unde $a\in\mathbf{Z}$ și notăm cu $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{C}$ rădăcinile acestuia.

0,75p a) Calculați: $f(-1)$.

0,75p b) Calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X-1$.

0,75p c) Demonstrați că $\{x_1;x_2;x_3;x_4\}\cap\mathbf{Z}=\varnothing$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+2X^3+aX^2+bX+c\in\mathbf{R}[X]$.

0,75p a) Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$, unde x_1,x_2,x_3,x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

0,75p b) Pentru $a=3$ și $b,c\in\mathbf{R}$, arătați că f nu poate avea toate rădăcinile reale.

0,75p c) Determinați $a,b,c\in\mathbf{Q}$, știind că restul împărțirii lui f la $X-1$ este 3 și f are rădăcina $a=-1+\sqrt{2}$. Să se determine rădăcinile lui f în acest caz.

3. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-3X+m\in\mathbf{Q}[X]$.

0,75p a) Aflați rădăcinile lui f, știind că $X=\sqrt{2}+1$ este o rădăcină a polinomului.

0,75p b) Să se determine $m\in\mathbf{Q}$, știind că $x_1x_2=x_3^2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

0,75p c) Să se determine $m\in\mathbf{Q}$, știind că rădăcinile lui f sunt în progresie aritmetică.

4. Se consideră polinomul $f=X^7+X^2+X+\hat{a}\in\mathbf{Z}_7[X]$.

0,75p a) Să se arate că pentru orice $b\in\mathbf{Z}_7$, $b\neq\hat{0}$, are loc $b^6=\hat{1}$.

0,75p b) Să se determine numărul de elemente al mulțimii $H=\{x^2\mid x\in\mathbf{Z}_7\}$.

0,75p c) Să se determine $\hat{a}\in\mathbf{Z}_7$, astfel încât f să aibă rădăcini în $\mathbf{Z}_7$.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră polinomul $f=X^3+3X+a\in\mathbf{R}[X]$.

0,75p a) Demonstrați că pentru orice $a\in\mathbf{R}$, polinomul f are o singură rădăcină reală.

0,75p b) Să se determine $a\in\mathbf{R}$ și rădăcinile polinomului f, știind că acesta are o rădăcină pur imaginară.

0,75p c) Pentru $a=1$, să se calculeze $E=\frac{x_1^2}{x_2\cdot x_3}+\frac{x_2^2}{x_3\cdot x_1}+\frac{x_3^2}{x_1\cdot x_2}$.

2. Se consideră $f=2X^3+3X^2+aX+2\in\mathbf{Z}[X]$.

0,75p a) Să se determine valorile întregi ale lui a, știind că f admite rădăcini întregi.

0,75p b) Arătați că dacă $a\in\mathbf{N}$, $a\geq 3$, atunci f nu poate avea toate rădăcinile reale.

0,75p c) Pentru $a=3$, să se determine rădăcinile lui f.

3. Se consideră polinomul $f=\hat{2}\cdot X^3+\hat{a}\cdot X+\hat{2}\in\mathbf{Z}_3[X]$.

0,75p a) Să se determine $\hat{a}\in\mathbf{Z}_3$, astfel încât f să fie divizibil cu $X+\hat{2}$.
0,75p b) Să se descompună f în factori ireductibili pentru $\hat{a}=0$.
0,75p c) Să se determine valorile lui $\hat{a}$ pentru care f este reductibil în $\mathbf{Z}_3[X]$.

4. Se consideră polinomul $f=X^4-2X^3+X^2+aX+b\in\mathbf{R}[X]$.

0,75p a) Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât f să fie divizibil cu X^2+1.
0,75p b) Pentru $a=-2$ și $b=0$, determinați câtul împărțirii polinomului f la X^2+1.
0,75p c) Să se determine a și b, astfel încât ecuația $f(x)=0$ să fie reciprocă și să se rezolve în acest caz.

Test de evaluare 3. - (timp de lucru: 150 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră polinomul $f=2X^3+(m-1)X^2+mX+2m+1\in\mathbf{R}[X]$.

5p a) Să se determine $m\in\mathbf{R}$, astfel încât f să fie divizibil cu $X+1$.
5p b) Să se determine $m\in\mathbf{R}$, astfel încât $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-m$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p c) Arătați că dacă $m\in\mathbf{Z}$, atunci f nu poate avea toate rădăcinile întregi.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-aX^3+3X^2+bX+2\in\mathbf{R}[X]$.

5p a) Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, știind că f este divizibil cu $(X+1)^2$.
5p b) Pentru $a=-2$ și $b=4$, să se determine rădăcinile lui f.
5p c) Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3$ în funcție de a și b, unde x_1,x_2,x_3,x_4 sunt rădăcinile lui f.

3. Se consideră polinomul $f=X^4-3X^3+2X^2+aX+b\in\mathbf{R}[X]$.

5p a) Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, știind că f admite rădăcina $x_1=i$.
5p b) Pentru $a=-3$ și $b=1$, să se determine rădăcinile polinomului.
5p c) Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$, unde x_1,x_2,x_3,x_4 sunt rădăcinile lui f.

4. Fie polinomul $f=X^4+X^3+aX+b$, $a,b\in\mathbf{R}$ și fie x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcinile polinomului f.

5p a) Determinați a și b, știind că $f(-1)=f(1)=0$.
5p b) Dacă $a=b=-1$, calculați $x_1^{2018}+x_2^{2018}+x_3^{2018}+x_4^{2018}$.
5p c) Dacă $a=b=-1$ și $g=X^4+X^2+1$, determinați cel mai mare divizor comun pentru polinoamele f și g.

5. Considerăm polinomul $f=X^4+aX^2-(a+1)X+1$, unde $a\in\mathbf{Z}$ și notăm cu $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{C}$ rădăcinile acestuia.

5p a) Calculați: $f(-1)$.
5p b) Calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X-1$.
5p c) Demonstrați că $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\cap\mathbf{Z}=\varnothing$.

Test de evaluare 4. - (timp de lucru: 150 min) - Din oficiu se acordă 10 punct.

1. În mulțimea polinoamelor $\mathbf{R}[X]$ se consideră $f=X^3+mX^2+nX+6$ și $g=X^2-X-2$.

5p a) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $g(X)=0$.
5p b) Determinați $m,n\in\mathbf{R}$, știind că f se divide cu g.
5p c) Pentru $m=-4$ și $n=1$, calculați $P=f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2017)\cdot f(2018)$.

2. Se consideră polinomul $f=(X+1)^{2017}-(X-1)^{2017}$ care are forma algebrică
$f=a_{2017}X^{2017}+a_{2016}X^{2016}+\ldots+a_1X+a_0, f\in\mathbf{R}[X]$.

5p a) Calculați: a_0.
5p b) Arătați că $f(1)+f(-1)$ este număr întreg par.
5p c) Determinați numărul rădăcinilor reale ale polinomului f.

3. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^3+bX+c$ cu $a,b,c\in\mathbf{R}, f\in\mathbf{R}[X]$.

5p a) Pentru $c=501$, demonstrați că: $f(1)+f(-1)=1004$.
5p b) Pentru $a=-2$, $b=2$ și $c=-1$, determinați rădăcinile reale ale polinomului f.
5p c) Arătați că nu există valori reale ale coeficienților a,b,c, astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul $g=x^3-x$.

4. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbf{R}[X]$, $f=X^3-3X+a$ și $g=X^2-3X+2$.

5p a) Pentru $a=2$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=g(x)$.
5p b) Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acesta are o rădăcină dublă pozitivă.
5p c) Pentru $a=2$, să se rezolve ecuația $e^{f(x)}=g\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

5. Considerăm polinomul $f=X^4-2X^3+X^2-4\in\mathbf{R}[X]$, cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4.

5p a) Arătați că restul împărțirii polinomului f la $X-1$ este -4.
5p b) Calculați câtul împărțirii polinomului f la polinomul $(X-1)^2$.
5p c) Arătați că polinomul f are exact două rădăcini reale.

6. Considerăm polinomul $f=X^3+aX^2+8X+3$, unde a este număr real.

5p a) Determinați numărul real a, știind că $f(1)=0$.
5p b) Pentru $a=6$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+5X+3.
5p c) Demonstrați că, dacă $a\in(-4,4)$, atunci polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

CLASA A XII-A * ANALIZĂ *

Cap. I. PRIMITIVE

BREVIAR TEORETIC

Integrala nedefinită a unei funcții

Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție. O funcție $F: I \to \mathbf{R}$ se numește *primitivă* a lui f dacă F este derivabilă pe I și $F'(x) = f(x), (\forall) x \in I$.

Dacă F este o primitivă a funcției f, atunci orice funcție de forma $F + c$, unde $c \in \mathbf{R}$, este primitivă a lui f. Mulțimea tuturor primitivelor lui f se numește *integrala nedefinită* a lui f și se notează astfel: $\int f(x)dx$. Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $\int f(x)dx = F + \mathscr{C}$.

Operații cu primitive

Dacă $f, g: I \to \mathbf{R}$ ($I \subset \mathbf{R}$, interval)sunt două funcții cu primitive și λ este un număr real nenul, atunci $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ și $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

Metode de calcul ale primitivelor

- *Metoda schimbării de variabilă.* Fie funcțiile $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ ($I, J \subset \mathbf{R}$, intervale). Dacă u este derivabilă, iar f are primitiva F, atunci funcția $(f \circ u) \cdot u'$ are primitiva $F \circ u$, adică:
$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C.$$
- *Metoda integrării prin părți.* Dacă $f, g: I \to \mathbf{R}$ (I interval) sunt două funcții derivabile, iar funcția $f'g$ are primitive, atunci și funcția fg' are primitive și are loc egalitatea:
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. - (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

1. Fie $F: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$.

15p a) Studiați monotonia lui F.

15p b) Determinați f, astfel încât F să fie o primitivă a lui f.

15p c) Calculați: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x^2 f(x))$.

2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

15p a) Calculați: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.

15p b) Arătați că funcția $F: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$ este o primitivă a funcției f.

15p c) Demonstrați că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1, \infty)$.

Test de evaluare 2. - (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră funcțiile $f, F:(-1,\infty)\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=(x+1)^2\ln(x+1) \text{ și } F(x)=\frac{(x+1)^3}{3}\ln(x+1)-\frac{(x+1)^3}{9}+\frac{1}{9}.$$

15p a) Calculați: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}}\dfrac{f(x)}{(x+1)^3}$.

15p b) Arătați că F este primitivă a funcției f.

15p c) Calculați: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^2}$.

2. Se consideră funcțiile $f, F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(x-1)e^x$ și $F(x)=(x-2)e^x+e$.

15p a) Demonstrați că F este primitivă a funcției f.

15p b) Calculați: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)}{(x-1)^2}$.

15p c) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{xe^x}$.

Test de evaluare 3. - (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1. Se consideră $f:(-1,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

15p a) Găsiți $a,b,c\in\mathbf{R}$, astfel încât $f(x)=ax+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}, (\forall)x>-1$.

15p b) Determinați primitivele funcției f pe $(-1,\infty)$.

15p c) Aflați primitiva care se anulează în zero.

2. Determinați primitivele funcțiilor:

15p a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(2x+1)^2-\dfrac{1}{x^2+9}$.

15p b) $g:(0,\infty)\to\mathbf{R}, g(x)=\dfrac{x^2-x+1}{4\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}$.

15p c) $h:(0,1)\to\mathbf{R}, h(x)=2x^2-5x+\dfrac{1}{x}-x\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Test de evaluare 4. - (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 1 punct.

1.

15p a) Determinați primitivele funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(x+1)e^{-x}$.

15p b) Determinați primitivele funcției $g:(-1,\infty)\to\mathbf{R}, g(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$.

15p c) Determinați primitivele funcției $h:(0,\infty)\to\mathbf{R}, h(x)=x\operatorname{arctg}x$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=(x+1)^2\ln(x+1)$.

15p a) Stabiliți primitiva G a funcției $g:(-1,\infty)\to\mathbf{R}, g(x)=\dfrac{f(x)}{(x+1)^2}$ care are proprietatea $G(0)=1$.

15p b) Determinați primitiva $F:(-1,\infty)\to\mathbf{R}$ a funcției f, pentru care $F(1)=0$.

15p c) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)}{x-1}$, unde F este primitiva de la punctul b).

Cap. II. INTEGRALA DEFINITĂ

BREVIAR TEORETIC

Operații: 1. *Liniaritate în raport cu funcția*: Dacă f, g sunt integrabile și $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci $f+g$ este integrabilă, λf integrabilă și $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$, $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

2. *Aditivitatea integralei definite*

Fie $c \in (a,b)$. Dacă f este integrabilă pe $[a,c]$ și f este integrabilă pe $[c,b]$, atunci f este integrabilă pe $[a,b]$ și reciproc. În acest caz, integrala este aditivă *în raport cu intervalul*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Dacă f este integrabilă, atunci $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. *Monotonie în raport cu funcția.*

Dacă f, g sunt integrabile și $f(x) \le g(x), (\forall) x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

4. *Teorema funcției modificate.* Fie $f,g : [a,b] \to \mathbf{R}$ două funcții. Dacă f este integrabilă și g diferită de f doar într-un număr finit de puncte ale domeniului $[a,b]$, atunci g este integrabilă și integralele celor două funcții sunt egale.

Teoreme remarcabile privind integrala Riemann

Formula Leibnitz-Newton: Dacă $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă care admite primitive, atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Teorema de medie: Dacă f este integrabilă și $m \le f(x) \le M, (\forall) x \in [a,b]$, atunci $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. În particular, dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci există $c \in [a,b]$, astfel încât $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$. Elementul $f(c)$ se numește *valoarea medie* a funcției f.

Teorema de existență a primitivelor unei funcții continue: Dacă $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci funcția $F : [a,b] \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$ este primitiva lui f care se anulează în a și avem: $\left(\int_a^{u(x)} f(t)dt\right) = f(n(x)) \cdot n'(x), (\forall) x \in [a,b]$.

În particular: $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), (\forall) x \in [a,b]$.

Formula de integrare prin părți: Dacă $f,g : [a,b] \to \mathbf{R}$ sunt două funcții derivabile cu derivatele continue, atunci are loc egalitatea $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

Formula de schimbare de variabilă: Dacă $\sigma : [a,b] \to J$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă, iar $f: J \to \mathbf{R}$ este continuă pe J, atunci $\int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt = \int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} f(x)dx$.

EXERSEAZĂ!

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. (timp de lucru: 150 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

1. Considerăm integrala $I(m)=\int_1^2 (m^2+(4-4m)x+4x^3)dx$, $m\in\mathbf{R}$.

5p a) Calculaţi: $I(-1)$.

5p b) Calculaţi: $I(m)$.

10p c) Rezolvaţi în $\mathbf{R}$ inecuaţia $I(m)\le 12$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{2018x^{2017}}{x^{2018}+1}$.

5p a) Calculaţi: $\int_{-1}^{1}(x^{2018}+1)f(x)dx$.

5p b) Verificaţi că funcţia $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=\ln(x^{2018}+1)$ este o primitivă a funcţiei f pe $\mathbf{R}$.

10p c) Calculaţi: $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

3. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

5p a) Calculaţi: $\int_0^1 (2x+1)f(x)dx$.

5p b) Arătaţi că $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $x\in\mathbf{R}$, este o primitivă a funcţiei f.

10p c) Calculaţi: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)dx$, $n\in\mathbf{N}^*$.

4. Fie şirul $(I_n)_{n\ge 0}$ cu termenul general: $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{2x+1}dx$, $n\in\mathbf{N}$.

10p a) Calculaţi: I_0, I_1.

10p b) Studiaţi monotonia şirului $(I_n)_{n\ge 0}$.

10p c) Calculaţi: $\lim\limits_{n\to\infty}(nI_n)$.

Test de evaluare 2. (timp de lucru: 120 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

1. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+4x+3$, calculaţi:

30p a) $\int_0^1 \dfrac{x}{f(x)}dx$; b) $\int_1^2 \dfrac{x^2+x}{f(x)}dx$; c) $\int_{-1}^{1} e^x\cdot f(x)dx$.

2. Se consideră funcţia $f:[1,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\int_0^{\ln x}\sqrt{e^t+3}\,dt$.

10p a) Arătaţi că f este monotonă.

10p b) Calculaţi: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

10p c) Calculaţi: $f(e)$.

3. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\ln(x^2+1)$ şi $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

10p a) Arătaţi că $\int_0^1 f'(x)dx=\ln 2$.

10p b) Demonstraţi că $\int g(x)dx=f(x)+\mathscr{C}$.

10p c) Calculaţi: $\int_1^2 \dfrac{g(x)}{f^2(x)}dx$.

Cap. III. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

BREVIAR TEORETIC

Aplicații ale integralei Riemann

1. *Aria* mulțimii Γ_f a punctelor din plan mărginită de dreptele $x=a$, $x=b$, $y=0$ și graficul funcției continue $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este $\mathcal{A}(\Gamma_f)=\int_a^b |f(x)|dx$.

2. *Volumul corpului de rotație* C_f obținut prin rotirea graficului funcției continue $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ în jurul axei Ox este $V(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

3. *Calculul unor limite de șiruri.* Dacă f este integrabilă, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

TESTE DE EVALUARE

Test de evaluare 1. (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

15p a) Să se calculeze aria porțiunii plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

15p b) Să se calculeze $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\operatorname{tg}x)dx$.

15p c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(x)dx$.

2. Fie $f,g:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$; $g(x)=\dfrac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}$.

15p a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)\cdot g(x))dx=0$.

15p b) Calculați: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin x+\cos x}dx$.

15p c) Determinați aria subgraficului funcției f.

Test de evaluare 2. (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

1.

15p a) Calculați: $\int_0^1 (f(x)+\ln(x^2+1))dx$.

15p b) Arătați că $\int_0^x \ln(t^2+a^2)dt = x\ln(a^2+x^2) - 2x + 2a\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$ și $a\in\mathbf{R}^*$.

15p c) Calculați aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^{5x}\sqrt{x^2+5}$.

15p a) Dacă $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o primitivă oarecare a funcției f, studiați monotonia funcției F.

15p b) Calculați: $\int_0^1 e^{5x}f(x)dx$.

15p c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $g(x)=e^{5x}\sqrt[4]{x^2+5}\cdot f(x)$ în jurul axei Ox.

Test de evaluare 3. (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=5x^4+3x^2+1$.

15p a) Arătați că $\int_0^1 (f(x)-3x^2-1)dx = 1$.

15p b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

15p c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\ln x$.

15p a) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este convexă pe $(0,\infty)$.

15p b) Calculați: $\int_e^{e^2} f(x^2\cdot e^x)dx$.

15p c) Determinați volumul corpului de rotație al funcției $g:[1,e]\to\mathbf{R}, g(x)=f(x)\cdot x$.

Test de evaluare 4. (timp de lucru: 50 min) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

1. Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}, f(x)=\cos x$.

15p a) Calculați aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției f și axele de coordonate.

15p b) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

15p c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:[3,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$.

15p a) Calculați: $\int_3^4 (x-1)(x-2)f(x)dx$.

15p b) Calculați: $\int_3^4 f(x)dx$.

15p c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $h:[3,4]\to\mathbf{R}, h(x)=f(x)-f(x+1)-\frac{1}{x-1}$.

TESTE FINALE

Testul 1. - (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

Subiectul I (30 de puncte)

5p 1. Fie legea de compoziție $x * y = xy + 5x + 5y + 20$ pe $\mathbf{R}$.

5p 2. Aflați unitățile monoidului $\left(\mathbf{Z}_8 \setminus \{\hat{0}\}, \cdot\right)$.

5p 3. Dați un exemplu de matrice inversabilă $A \in GL_3(\mathbf{C})$ așa încât $\text{ord}(A) = 2$ în $(GL_3(\mathbf{C}), \cdot)$.

5p 4. Calculați: $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+4}} dx$, $x \in \mathbf{R}$.

5p 5. Dacă $f: (0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t+4} dt$, calculați: $f'(e)$.

5p 6. Calculați $\int_0^1 f(x)dx$, unde $f: [0,1] \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{\text{arctg}\, x}{1+x^2}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Pe $G = (-3,3)$ definim $x * y = \frac{9(x+y)}{xy+9}, (\forall) x, y \in G$.

5p a) Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu " $*$ ".

5p b) Determinați elementul neutru în raport cu legea " $*$ ".

5p c) Demonstrați că $(G, *)$ nu are elemente de ordinul al III-lea.

2. Pe $G = (-5, +\infty)$ considerăm legea $x \circ y = xy + 5x + 5y + 20, (\forall) x, y \in G$.

5p a) Arătați că $x \circ y = (x+5)(y+5) - 5, (\forall) x, y \in G$.

5p b) Arătați că $f: G \to (0,\infty), f(x) = x + 5$ este izomorfism între grupurile $(G, \circ)$ și $((0,\infty), \cdot)$.

5p c) Calculați $(-5) \circ (-4) \circ (-3) \circ \ldots \circ 2018$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{9+x^2} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{9+x^2} dx, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

5p a) Calculați: $I_1 \cdot I_2$.

5p b) Stabiliți monotonia șirului $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2} dx$.

5p a) Calculați: $\int_0^1 (x^2 + 2x + 2)dx$.

5p b) Demonstrați că $I_{n+1} + 2I_n + 2I_{n-1} = \frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$.

5p c) Demonstrați că $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n = \frac{1}{5}$.

Testul 2. - (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

Subiectul I (30 de puncte)

5p 1. Calculați ordinul elementului $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ în monoidul $(\mathcal{M}_3(\mathbf{R}),\cdot)$.

5p 2. Calculați $(-15)\circ 0\circ 2$, unde $x\circ y=xy-2x-2y$.

5p 3. Aflați elementul neutru al operației $x*y=5xy-5x-5y+6$, $x,y\in\mathbf{R}$.

5p 4. Calculați $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $x\in\mathbf{R}$.

5p 5. Calculați derivata funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\int_x^1 \sqrt{t^2+1}\,dt$.

5p 6. Calculați valoarea medie a funcției $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ și $G=\left\{X(t)=I_2+t\cdot A \mid t\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)\right\}$.

5p a) Calculați: $X(a)\cdot X(b)-X(a+b+2ab)$, $a,b\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.

5p b) Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

5p c) Arătați că $f:G\to\mathbf{R}_+^*$, $f(X(t))=2t+1$ este izomorfism între grupurile $(G,\cdot)$ și $(\mathbf{R}_+^*,\cdot)$.

2. Considerăm legea asociativă $x\circ y=xy+4x+4y+12$, $(\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

5p a) Arătați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, $(\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

5p b) Calculați $(-12)\circ(-11)\circ(-10)\circ\ldots\circ 0\circ 1\circ 2$.

5p c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 2017 ori}}=-5$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie șirul (I_n) definit prin $I_0=\int_0^1 \sqrt{x^2+9}\,dx$, $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+9}\,dx$, $n\in\mathbf{N}^*$.

5p a) Calculați: I_0.

5p b) Arătați că $(n+2)I_n=10\sqrt{10}-9(n-1)I_{n-2}$, $(\forall)n\geq 3$.

5p c) Calculați: I_3.

2. Calculați:

5p a) $\int \frac{\cos^n x}{\sin^{n+2}x}dx$, $x\in(0,\pi)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

5p b) $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)dx$.

5p c) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x+17}dx$, $x\in\mathbf{R}$.

Testul 3. - (timp de lucru: 3 ore) - Din oficiu se acordă 10 puncte.

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați ordinul elementului $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ în $(S_4, \cdot)$.

5p **2.** Calculați $1 * 3 * 7$, unde $x * y = 2xy - y + 1$, $x, y \in \mathbf{R}$.

5p **3.** Aflați elementul neutru al operației $x \circ y = xy + 2y + 2x + 2$, $x, y \in \mathbf{R}$.

5p **4.** Calculați: $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

5p **5.** Aflați $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \int\limits_0^x (7t^2 - 6t + 1)^{2017} dt$.

5p **6.** Calculați valoarea medie a funcției $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{ X(t) = I_2 + t \cdot A \mid t \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right) \right\}$.

5p a) Calculați: $X(a) \cdot X(b) - X(a + b + 3ab)$, $a, b \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$.

5p b) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

5p c) Arătați că $f: G \to \mathbf{R}_+^*$, $f(X(t)) = 3t + 1$ este izomorfism între grupurile $(G, \cdot)$ și $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$.

2. Considerăm legea $x * y = xy - 2x - 2y + 6, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

5p a) Arătați că $(2, \infty)$ este parte stabilă în raport cu legea " $*$ ".

5p b) Calculați: $(-5) * (-4) * \ldots * 12$.

5p c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{2017 \text{ ori}} = 3$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie șirul (I_n) definit prin $I_0 = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$, $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$, $n \in \mathbf{N}^*$.

5p a) Calculați: I_1 și I_2.

5p b) Arătați că $I_n = \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}, (\forall) n \geq 3$.

5p c) Demonstrați că șirul (I_n) este convergent și aflați limita sa.

2. Calculați:

5p a) $\int \frac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x} dx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

5p b) $\int\limits_3^4 \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right) dx$.

5p c) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2} dx$.

*

* *

TESTE PENTRU BACALAUREAT 2018

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 1

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că: $\left(3-\frac{1}{3}\right):\frac{8}{3}=1$.

5p **2.** Calculați $f(-5)+f(5)$, unde $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{x-2}=4$.

5p **4.** Fie mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea M, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,8)$, $B(4,10)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Calculați perimetrul triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AB=8$ și $AC=6$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $\det A=-2$.

5p b) Arătați că $A-B=I_2$.

5p c) Calculați $AB+BA$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2+X+3$.

5p a) Arătați că $f(-3)=0$.

5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X+3$.

5p c) Calculați $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=4x^3+6x^2+2$.

5p a) Arătați că: $f'(x)=12x(x+1), (\forall)\, x\in\mathbf{R}$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)-4x^3}$.

5p c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=8x^3+3x^2$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=3$.

5p b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2017$.

5p c) Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^n f(x)dx=2n^4$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 2

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se determine al zecelea termen al șirului $1, 3, 5, 7, \ldots$

5p **2.** Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $x^2 - 8x + 12 < 0$.

5p **3.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x-1) - \log_2(x-3) = 2$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB = 4$, $BC = 6$ și $m(\sphericalangle B) = 30°$.

5p **6.** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ știind că punctul $A(1, m)$ este pe dreapta $d: x - y + 8 = 0$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = A^2 + I_2$ și A^t transpusa matricei A.

5p a) Să se calculeze A^2.

5p b) Să se verifice că $\det B = 50$.

5p c) Să se verifice că $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = 3xy + 3x + 3y + 2.$$

5p a) Arătați că: $x * y = 3(x+1)(y+1) - 1, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

5p b) Calculați $2 * 3$.

5p c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $x * x = -1$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 5x + 6$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

5p c) Să se demonstreze că f este convexă pe $\mathbf{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, F(x) = e^x(x+3)$.

5p a) Să se determine funcția f, știind că F este o primitivă a sa.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)F(x)dx$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 3

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați $x \in \mathbf{R}$, știind că numerele $x-1$, $2x$, $x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Calculați $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2-5x+6=0$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_3 x+\log_3 9=4$.

5p **4.** Calculați $\frac{C_5^3+A_5^3}{P_2}$.

5p **5.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuație:
$d_1: x+y-3=0$ și $d_2: 2x+3y-6=0$.

5p **6.** Calculați $\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați $AB-BA$.

5p b) Calculați $\det A$.

5p c) Determinați inversa matricei A.

2. Fie polinoamele $f=X^3-X^2+X-1$, $g=X^2+1$.

5p a) Aflați câtul și restul împărțirii polinomului f la g.

5p b) Stabiliți dacă polinoamele f și g au rădăcini comune.

5p c) Descompuneți polinomul f în factori ireductibili peste $\mathbf{Q}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases} 2x^2-1, & x\geq 1 \\ 4x-3, & x<1 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f.

5p b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

5p c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$.

2. Fie funcțiile $F, f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $F(x)=e^x(x^2+2x+2)$ și $f(x)=e^x(x^2+4x+4)$.

5p a) Arătați că F este o primitivă a funcției f.

5p b) Arătați că F este convexă pe $(-\infty,-4)\cup(-2,+\infty)$.

5p c) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=1$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 4

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $3 \in [\log_2 4, \log_2 16]$.

5p **2.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $2^{x^2-5x+8} = 4$.

5p **3.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din mulțimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, acesta să fie cub perfect.

5p **4.** Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_1 = 2$, $b_2 = 6$. Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai progresiei.

5p **5.** Aflați numărul real m știind că lungimea segmentului $AB = m$, unde $A(-2, -1)$ și $B(2, 2)$.

5p **6.** Calculați aria triunghiului ABC știind că $AB = 6$, $BC = 4$ și $m(\sphericalangle ABC) = 60°$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați A^2.

5p b) Calculați inversa matricei $B = A - \sqrt{2} \cdot I_2$.

5p c) Determinați $x \in \mathbf{R}$ pentru care $\det(A - xI_2) = 0$.

2. Pe $\mathbf{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = xy - 4x - 4y + 20$.

5p a) Arătați că $x * y = (x-4)(y-4) + 4$.

5p b) Calculați $2017 * 4$ și $4 * 2018$.

5p c) Știind că legea este asociativă calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 2017$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, x \geq 1 \\ ax, \quad x < 1 \end{cases}, a \in \mathbf{R}$.

5p a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ știind că funcția este continuă în $x_0 = 1$.

5p b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p c) Să se studieze monotonia funcției f pentru $x \geq 1$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{-2\} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.

5p a) Calculați $\int_0^1 (x+2) f(x) dx$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + xf'(x)) dx = \dfrac{1}{3}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 5

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\log_5 10 + \log_5 2 - \log_5 4$.

5p **2.** Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=3^x-9$, determinați numărul real m știind că $f(m)=0$.

5p **3.** Arătați că numărul $(i+2)^2+(i-2)^2$ este natural, unde $i^2=-1$.

5p **4.** După o scumpire cu 10%, prețul unui produs este de 550 lei. Să se calculeze prețul înainte de scumpire.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei ce trece prin punctul $A(1,2)$ și are panta 3.

5p **6.** Calculați $\sin 2x$, știind că x este suplementul unghiului de $60°$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x-y-az=0 \end{cases}$.

5p a) Să se rezolve sistemul pentru $a=-2$.

5p b) Calculați determinantul matricei sistemului.

5p c) Să se determine $a\in\mathbf{R}$, astfel încât matricea sistemului să fie inversabilă.

2. Pe $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-2x-2y+6$.

5p a) Demonstrați că $x*y=(x-2)(y-2)+2, (\forall)\, x,y\in\mathbf{R}$.

5p b) Calculați $2*2017$ și $2018*2$.

5p c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $x*x*x=2$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases} 5x-6, x\geq 2 \\ x^2, \quad x<2 \end{cases}$.

5p a) Studiați derivabilitatea funcției în $x_0=2$.

5p b) Calculați $f(-2)+f(0)+f(2)$.

5p c) Aflați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}$.

5p a) Calculați $\int_1^e \left(f(x)-\dfrac{1}{x+1}\right)dx$.

5p b) Calculați $\int_1^2 f(x)dx$.

5p c) Calculați aria suprafeței determinată de graficul funcției g, axa Ox și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=3$, știind că $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x+1}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 6

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\log_3(\sqrt{5}+\sqrt{2})+\log_3(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

5p **2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-3}=\frac{1}{27}$.

5p **3.** Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un element din mulțimea $M=\{0,1,2,3,4\}$, aceasta să verifice inegalitatea $n!\leq 2^n$.

5p **4.** Determinați $m\in\mathbf{R}$ pentru care punctul $A(1,2)$ aparține graficului funcției: $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+x+m$.

5p **5.** Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctele $A(1,0)$ și $B(2,1)$.

5p **6.** Fie triunghiul ABC cu $AB=3$, $AC=4$, $m(\widehat{BAC})=60^\circ$. Să se calculeze BC.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \\ x-y+z=1 \end{cases}$.

5p a) Scrieți matricea sistemului și matricea extinsă sistemului.

5p b) Cercetați dacă matricea sistemului este inversabilă.

5p c) Să se rezolve sistemul.

2. Fie polinomul $f=X^3-4X+1$ și x_1,x_2,x_3 rădăcinile sale.

5p a) Determinați restul împărțirii lui f la $X-1$.

5p b) Calculați $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$.

5p c) Arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^3-6x^2+9x+1$.

5p a) Arătați că $f'(1)+f(1)=5$.

5p b) Să se determine coordonatele punctelor de extrem al funcției.

5p c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(3,3)$.

2. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x\cdot e^x$.

5p a) Calculați $\int_0^1 f(x)\cdot\frac{1}{e^{2x}}dx$.

5p b) Să se determine aria suprafeței cuprinse între axa Ox, graficul funcției f și dreptele de ecuație $x=0$, $x=1$.

5p c) Demonstrați că pentru orice $a\in\mathbf{R}$ are loc inegalitatea $\int_0^a f(x)dx>ae^a-e^a$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 7

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\frac{1}{2+i}+\frac{1}{2-i}$, știind că $i^2=-1$.

5p **2.** Fie $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x-4$ și $g(x)=x+1$. Să se determine punctul de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $\log_3(x^2+5)=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 20%, prețul unui produs este 240 lei. Calculați prețul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** Se dau vectorii $\vec{v_1}=2\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v_2}=\vec{i}-2j$. Calculați $2\vec{v_1}-\vec{v_2}$.

5p **6.** În triunghiul ABC, $AB=3$, $BC=6$, $AC=4$. Arătați că triunghiul este obtuzunghic.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru orice $n\in\mathbf{Z}$ se consideră punctele $A_n(n+1, n+2)$.

5p a) Să se determine $a\in\mathbf{R}$ știind că punctul A_0 este pe dreapta de ecuație

$$x+y-3a=0.$$

5p b) Să se verifice că punctele A_0, A_1, A_2 sunt coliniare.

5p c) Calculați lungimea segmentului A_1A_2.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X-1$ și x_1x_2,x_3 rădăcinile sale.

5p a) Dacă a este una din rădăcinile polinomului f, să se demonstreze că $a^3=1-2a$.

5p b) Să se calculeze restul împărțirii polinomului f la $X-1$.

5p c) Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x}{x+1}$.

5p a) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

5p b) Demonstrați că funcția f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

5p c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(0,1)$.

2. Fie $f_n:[0,1]\to\mathbf{R}, f_n(x)=x^n\cdot e^x, (\forall)\, n\in\mathbf{N}^*$.

5p a) Calculați: $\int_0^1 \frac{f_1(x)}{x}dx$.

5p b) Arătați că: $\int_0^1 f_1(x)dx=1$.

5p c) Demonstrați că: $\int_0^1 f_n(x)dx\geq\frac{1}{n+1}, (\forall)\, n\in\mathbf{N}, n\geq 1$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 8

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați $x \in \mathbf{R}$ știind că numerele $x-1$, x, $x+2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale, ecuația $3^{x+1}+3^x=12$.

5p **3.** Determinați $a \in \mathbf{R}$, știind că $f(f(2))=4$ unde $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x+a$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente, ale unei mulțimi cu 5 elemente.

5p **5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,2)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: x+y-2=0$ și $d_2: 2x-y-1=0$.

5p **6.** Calculați sinusul unghiului A al triunghiului ABC, știind că $AB=4, AC=5$ și $BC=6$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ și $B=I_2+A$.

5p a) Calculați I_2+A.

5p b) Calculați B^{-1}.

5p c) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ ecuația $X^2=A$.

2. Pe $\mathbf{R}$ definim legea asociativă $x*y=2xy-6x-6y+21$.

5p a) Demonstrați că $x*y=2(x-3)(y-3)+3, (\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

5p b) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\left(\log_2 x\right)\circ\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)=-11$.

5p c) Determinați $n\in\mathbf{N}$, astfel încât $\underbrace{5*5*\ldots*5}_{\text{de } n \text{ ori}}=515$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^x+x+3$.

5p a) Să se arate că f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.

5p b) Să se arate că f este convexă pe $\mathbf{R}$.

5p c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x}$.

5p a) Calculați: $\int_1^e\left(f(x)-\dfrac{1}{x+2}\right)dx$.

5p b) Calculați aria suprafeței determinată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

5p c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbf{R}, g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 9

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se arate că numerele $A_3^1, \log_2 16, C_5^1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** În mulțimea numerelor reale, să se rezolve ecuația $\sqrt{x^2+64} = 10$.

5p **3.** Să se determine numărul submulțimilor cu 3 elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5p **4.** Se consideră ecuația $x^2-(m+5)x+6=0$, cu rădăcinile x_1 și x_2. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ știind că $x_1+x_2 = 6x_1 \cdot x_2$.

5p **5.** Se consideră dreptele $d_1: 2x+y-6=0$, $d_2: ax+2y-30$ și $d_3: bx-6y-1=0$. Să se determine a și b numere reale, știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele, iar dreptele d_1 și d_3 sunt perpendiculare.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 75^\circ - \cos 15^\circ$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = A - I_3$.

5p a) Să se calculeze $A \cdot B$ și $B \cdot A$.

5p b) Să se arate că $B^3 = 0_3$, unde $B^3 = B \cdot B \cdot B$.

5p c) Determinați A^{2018}.

2. Se consideră polinomul $f \in C[X]$, $f = aX^2 - bX + 6, a \neq 0$.

5p a) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, știind că 2 și 3 sunt rădăcinile polinomului.

5p b) Să se calculeze restul împărțirii polinomului f la $X-1$, știind că $a=1$, $b=5$.

5p c) Pentru $a=1$ și $b=5$, să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R}\setminus\{2\} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x+2}{x-2}$.

5p a) Să se arate că $f'(x) = -\frac{4}{(x-2)^2}$.

5p b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$.

5p c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x=4$.

2. Se consideră funcțiile $f_n, F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_n(x) = x^n \cdot e^x, F(x) = (x-1) \cdot e^x, n \in \mathbf{N}$.

5p a) Să se verifice că F este o primitivă a lui f_1.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x)dx$.

5p c) Aflați aria suprafeței plane determinată de graficul funcției f_2, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 10

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze $C_4^3 + A_4^2 - P_4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 7x + 12$. Să se calculeze $f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(2017)$.

5p **3.** Să se determine ecuația de gradul al doilea știind că soluțiile x_1 și x_2 verifică simultan condițiile $x_1 + x_2 = 5$ și $x_1 \cdot x_2 = 6$.

5p **4.** Știind că $\log_2 3 = a$, să se calculeze în funcție de a: $\log_2 3 + \log_2 100 - \log_2 25$.

5p **5.** Să se calculeze $\cos 2x$ știind că $\sin x = \frac{4}{5}$.

5p **6.** Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $BC = 4$, și $m(\hat{A}) = 30°$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(2,3), B(1,0), C(a,1), a \in \mathbf{R}$.

5p a) Să se scrie ecuația dreptei AB.

5p b) Pentru $a = 1$, să se calculeze aria triunghiului ABC.

5p c) Să se determine $a \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele A, B și C să fie coliniare.

2. Fie $G = (3,\infty)\setminus\{4\}$. Definim pe G legea asociativă $x * y = 3 + (x-3)^{\ln(y-3)}$.

5p a) Determinați elementul neutru al legii.

5p b) Determinați simetricul elementului 5 în raport cu legea "$*$".

5p c) Rezolvați în G ecuația: $x * x = x$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 4x-2, x \le 1 \\ \ln x + 2, x > 1 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze derivabilitatea funcției f pe $\mathbf{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2}$.

5p c) Să se arate că $f(-1) + f(0) + f(1) = 0$.

2. Se consideră funcțiile $f, F: (0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x} + x, F(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}$.

5p a) Să se verifice că F este o primitivă a lui f.

5p b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

5p c) Să se determine volumul corpului de rotație, obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției f și dreptele de ecuație $x = 1$ și $x = 3$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 11

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $1+4+7+\ldots+x=145$.

5p **2.** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=m^2x^2-(3m-1)x+2$. Să se determine $m\in\mathbf{R}^*$, astfel încât abscisa punctului de minim să fie 1.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}=3$.

5p **4.** Câte numere de trei cifre distincte, divizibile cu 5, se pot forma cu: $0,1,2,3,4,5$.

5p **5.** Fie $A(1,2)$ și $B(3,4)$. Scrieți ecuația dreptei care trece prin $C(-1,3)$ și este perpendiculară pe AB.

5p **6.** Fie $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $b\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Aflați $\operatorname{tg}(a+b)$ știind că $\cos a=\frac{5}{13}$ și $\sin b=\frac{3}{5}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$.

5p a) Determinați $x\in\mathbf{R}$, astfel încât $\det(A-x\cdot I_2)=0$.

5p b) Demonstrați că $A^2=5A$ și calculați A^n, $n\in\mathbf{N}^*$.

5p c) Dacă $B=I_2+A$, determinați $B^n, n\in\mathbf{N}^*$.

2. Fie $f\in\mathbf{R}[X], f=X^3-2X^2+(m+1)X-2m-1$.

5p a) Determinați $m\in\mathbf{R}$, astfel încât f să se dividă cu $X-1$.

5p b) Pentru $m=-1$, să se determine rădăcinile lui f.

5p c) Să se arate că pentru $m=1$, polinomul nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}x\cdot e^{-x}, x<0\\ x\cdot e^{x},\ x\geq 0\end{cases}$.

5p a) Studiați derivabilitatea lui f în $x_0=0$.

5p b) Arătați că f este inversabilă și determinați $(f^{-1})'(e)$.

5p c) Demonstrați că: $\ln 4<\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}}$.

2. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\int_0^{x^2}e^{t^3}dt$.

5p a) Determinați intervalele de monotonie ale lui f.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x^2}{x^8}$.

5p c) Folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1, (\forall)x\in\mathbf{R}$, arătați că $f(1)\geq\frac{5}{4}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 12

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați primul termen și rația unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ în care: $b_1+b_2+b_3=26$ și $b_4-b_1=52$.

5p **2.** Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ rădăcinile funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-2x+2$. Calculați $x_1^4+x_2^4$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $2^{2x+1}-3\cdot 2^x=-1$.

5p **4.** În câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ format din 5 membri, din care 3 sunt băieți, dintr-o clasă cu 30 de elevi în care sunt 18 fete?

5p **5.** Dacă G este centrul de greutate al unui triunghi ABC, arătați că $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

5p **6.** Într-un triunghi ABC se cunosc $AB=1$, $AC=4$ și $A=\frac{\pi}{3}$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $x\in\mathbf{R}$ și $\Delta(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix}$.

5p a) Calculați $\Delta(2)$.

5p b) Calculați $\Delta(x), x\in\mathbf{R}$, scriind rezultatul în formă de produs.

5p c) Rezolvați ecuația $\Delta(3^x)=0, x\in\mathbf{R}$.

2. Se consideră pe $\mathbf{R}$ legea de compoziție, $x\circ y=xy-2x-2y+6, (\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

5p a) Arătați că $H=(2;\infty)$ este subgrup al grupului $(G,\circ)$, unde $G=\mathbf{R}\setminus\{2\}$.

5p b) Arătați că $f:(2,\infty)\to\mathbf{R}_+^*, f(x)=x-2$ este un izomorfism între grupurile $(H,\circ)$ și $(\mathbf{R}_+^*,\cdot)$.

5p c) Calculați: $\frac{5}{2}\circ\frac{8}{3}\circ\frac{11}{4}\circ\ldots\circ\frac{299}{100}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

5p a) Determinați asimptotele la graficul funcției.

5p b) Determinați intervalele de convexitate și concavitate.

5p c) Arătați că: $\frac{\ln 25}{25}\leq\frac{\ln 4}{16}+\frac{\ln 6}{36}$.

2. Fie $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}dx, n\in\mathbf{N}^*$.

5p a) Calculați I_1.

5p b) Studiați monotonia șirului $(I_n)_{n\geq 1}$.

5p c) Arătați că $I_{n+2}+2I_{n+1}+2I_n=\frac{1}{n+1}, (\forall)n\in\mathbf{N}^*$ și calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot I_n)$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 13

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$ și $g(x) = x^2 + x$. Să se rezolve inecuația: $(g \circ f)(x) \geq 0$.

5p **2.** Determinați $x \in \mathbf{R}$, astfel încât $x, 2x - 3$ și $x^2 - x$ să fie în progresie aritmetică.

5p **3.** Rezolvați în $(0, \infty)$ ecuația: $\lg^2 x - 5\lg x + 4 = 0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând o funcție $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ aceasta să fie injectivă.

5p **5.** Să se determine $m \in \mathbf{R}$, astfel încât unghiul vectorilor $\vec{u} = (m-1) \cdot \vec{i} + m \cdot \vec{j}$ și $\vec{v} = m \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$ să fie obtuz.

5p **6.** În triunghiul ABC, $AB = 3\sqrt{2}$ și $C = \frac{\pi}{4}$. Aflați raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie punctele $A_m(2m^2 - 1, 3m)$, $m \in \mathbf{N}$.

5p a) Scrieți ecuația dreptei A_1A_2.

5p b) Calculați aria triunghiului OA_1A_2.

5p c) Arătați că nu există $m \in \mathbf{N}^*$, astfel încât triunghiului OA_1A_m să fie egală cu $\frac{3}{2}$.

2. Fie $f \in \mathbf{R}[X], f = X^4 - 6X^3 + 12X^2 + (3m-1)X - n$.

5p a) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$, astfel încât $x_1 = 1 - i$ să fie rădăcină a lui f.

5p b) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$, astfel încât f să admită o rădăcină reală triplă mai mică decât 2.

5p c) Pentru $n = m = 1$, aflați $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$, unde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$ sunt rădăcinile lui f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f: \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

5p a) Scrieți ecuația dreptei care trece prin $A(1,2)$ și este paralelă cu tangenta dusă la graficul lui f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

5p b) Determinați punctele de extrem ale lui f.

5p c) Studiați convexitatea funcției f.

2. Fie $I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sin 2x \, dx, n \in \mathbf{N}^*$.

5p a) Calculați I_1.

5p b) Arătați că: $I_n = -\frac{\cos 2}{2} + \frac{n \sin 2}{4} - \frac{n(n-1)}{4} \cdot I_{n-2}, (\forall) n \geq 3$.

5p c) Calculați I_3.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 14

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x+1$. Rezolvați ecuația $2\cdot f(x)+3\cdot f(-x)=2$.

5p **2.** Determinați $m\in\mathbf{R}$, astfel încât ecuația $x^2-mx-m-1=0$ să admită rădăcini egale.

5p **3.** După o scumpire cu 10% un televizor costă 1100 lei. Aflați prețul inițial.

5p **4.** Aflați al cincilea termen al dezvoltării binomului $(x-1)^{10}$.

5p **5.** Determinați $m\in\mathbf{R}$, știind că vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari, unde: $\vec{u}=(m+2)\cdot\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=(2m-1)\cdot\vec{i}+2\vec{j}$ să fie coliniari.

5p **6.** Aflați aria triunghiului MNP cu $MN=2$, $MP=3$ și $m(\widehat{M})=120°$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbf{R})$.

5p a) Calculați $\det A$.

5p b) Calculați A^2-A+I_3.

5p c) Determinați $A^n, n\in\mathbf{N}^*$.

2. Fie $f\in\mathbf{R}[X], f=X^3-mX^2-3X+2$.

5p a) Pentru $m=1$ aflați restul împărțirii lui f la $X+1$.

5p b) Aflați $m\in\mathbf{R}$, astfel încât $f\vdots X-1$.

5p c) Pentru $m=0$ calculați $x_1^3+x_2^3+x_3^3$, unde $x_1,x_2,x_3\in\mathbf{C}$ sunt rădăcinile lui f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

5p a) Calculați $f'(x)$.

5p b) Determinați asimptotele la graficul lui f.

5p c) Arătați că: $f(\sqrt[3]{2})>f(\sqrt[3]{3})$.

2. Fie $n\in\mathbf{N}$ și $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f_n(x)=\dfrac{x^n}{x^2+1}$.

5p a) Calculați $\int_0^1 f_2(x)\cdot(x^2+1)dx$.

5p b) Arătați că $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, F(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ este o primitivă a lui f_3.

5p c) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul lui f_2, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 15

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $2+5+8+\ldots+59$.

5p **2.** Aflați distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+4x+3$, cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_3(2x-1)=3$.

5p **4.** Calculați $|z_1+z_2|$, unde $z_1=1-i$ și $z_2=2+2i$.

5p **5.** Aflați vectorul $\overrightarrow{AB}$ știind că $A(1,2)$ și $B(3,5)$.

5p **6.** Dacă $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\sin x=\frac{1}{3}$, aflați $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul: $\begin{cases} 3x-2y+mz=-2 \\ mx+y-2z=5 \\ -x+3z=-4 \end{cases}$, $m\in\mathbf{R}$.

5p a) Calculați determinantul matricei sistemului.

5p b) Pentru $m=1$, rezolvați sistemul.

5p c) Determinați $m\in\mathbf{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

2. Pe $\mathbf{R}$ se consideră legea de compoziție $x\circ y=x+y-2, (\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

5p a) Determinați $x\in\mathbf{R}$, astfel încât $x\circ x^2=0$.

5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție.

5p c) Știind că legea de compoziție este asociativă, calculați: $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 100$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=x+\ln(x+1)$.

5p a) Calculați $f'(x)$.

5p b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0=0$ situat pe graficul funcției.

5p c) Arătați că f este concavă.

2. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x}{e^x}$.

5p a) Calculați $\int e^x\cdot f(x)dx$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p c) Folosind eventual, $e^x\geq x+1, (\forall)x\in\mathbf{R}$, arătați că: $\int_1^2 f(x)dx\leq 1-\ln\frac{3}{2}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 16

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=mx^2-2x+1$. Determinați $m\in\mathbf{R}^*$, astfel încât graficul funcției să fie tangent axei Ox.

5p **2.** Determinați mulțimea $A=\{x \mid x^2-3x-4=0\}\cap\mathbf{N}$.

5p **3.** Determinați $x\in\mathbf{R}$, astfel încât: $2^{x^2+3x}=\frac{1}{4}$.

5p **4.** Într-o urnă sunt 3 bile albe, 4 roșii și 5 negre. Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare o bilă, aceasta să nu fie neagră?

5p **5.** Dacă $\vec{u}=2\cdot\vec{i}+(m-1)\cdot\vec{j}$ și $\vec{v}=3\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}$, aflați $m\in\mathbf{R}$, astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

5p **6.** Calculați: $\sin^2 25^\circ+\sin^2 65^\circ$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ m & 1 & 2\\ 0 & m & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbf{R})$.

5p a) Calculați $\det A$, pentru $m=2$.

5p b) Aflați $m\in\mathbf{R}$, astfel încât A să fie inversabilă.

5p c) Pentru $m=-2$, calculați A^{-1}.

2. Pe $\mathbf{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă, definită prin:

$$x*y=xy+2x+2y+2,(\forall)x,y\in\mathbf{R}.$$

5p a) Arătați că $x*y=(x+2)(y+2)-2,(\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

5p b) Determinați $a\in\mathbf{R}$, astfel încât $x*a=a,(\forall)x\in\mathbf{R}$.

5p c) Calculați: $(-\sqrt{10})\circ(-\sqrt{9})\circ\ldots\circ\sqrt{9}\circ\sqrt{10}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2\cdot e^x$.

5p a) Calculați $f'(x)$.

5p b) Calculați: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2\cdot e^x-e}{x-1}$.

5p c) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

2. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}x+\ln x, x>1\\ x^2-3x+3, x\le 1\end{cases}$.

5p a) Arătați că f admite primitive pe $\mathbf{R}$.

5p b) Calculați: $\int_2^e f(x)dx$.

5p c) Determinați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 17

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați: $1+3+3^2+3^3+\ldots+3^{99}$.

5p **2.** Determinați $m \in \mathbf{R}$, astfel încât ecuația $x^2+(m+1)x+2m-1=0$, să aibă două rădăcini reale și distincte.

5p **3.** Calculați: $C_{10}^3+A_9^2$.

5p **4.** Un produs costă 100 de lei. Aflați prețul produsului după două scumpiri succesive de 10% și respectiv 5%.

5p **5.** Scrieți ecuația dreptei determinată de punctele $M(-2,1)$ și $N(1,3)$.

5p **6.** Dacă $x \in (90°, 180°)$ și $\cos x = -\frac{2}{3}$, aflați $\sin(180°-x)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

5p a) Calculați $\det A$.

5p b) Arătați că $A^2-5A-I_2=O_2$.

5p c) Aflați inversa matricei $B=A-5I_2$.

2. Fie $f \in \mathbf{R}[X], f=X^3+4X^2+X-6$.

5p a) Aflați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2+X+1$.

5p b) Aflați rădăcinile lui g.

5p c) Calculați $f(x_1)+f(x_2)$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile lui g.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f: \mathbf{R}\setminus\{-1\} \to \mathbf{R}, f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

5p a) Calculați $f'(x), x \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

5p b) Determinați asimptotele la graficul lui f.

5p c) Arătați că $f(x) \le -4, (\forall) x < -1$.

2. Fie $f: (0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

5p a) Calculați $\int (x+1)\cdot f(x)dx$.

5p b) Calculați $\int_1^e (x+1)\cdot \ln x \cdot f(x)dx$.

5p c) Determinați volumul corpului determinat prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1,2] \to \mathbf{R}, g(x)=f(x)$

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 18

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Aflați primul termen și rația unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_2 = 4$ și $b_4 = 16$.

5p **2.** Fie x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2 - mx + m = 0$. Determinați $m \in \mathbf{R}$, cu proprietatea $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt{x^2+8x} = 3$.

5p **4.** Câte submulțimi cu cel puțin 3 elemente are mulțimea $A = \{1,2,3,4,5\}$?

5p **5.** Arătați că punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$ și $C(-1,-1)$ sunt coliniare.

5p **6.** Dacă $AB = 2$, $AC = 3$ și $m(\hat{A}) = 60°$, determinați BC.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul: $\begin{cases} mx + y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$, $m \in \mathbf{R}$.

5p a) Calculați determinantul matricei sistemului.

5p b) Pentru $m = 3$, rezolvați sistemul.

5p c) Dacă $m = 1$, arătați că matricea sistemului este inversabilă și calculați inversa ei.

2. Pe $\mathbf{Z}$ se consideră legea de compoziție: $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, (\forall) x, y \in \mathbf{Z}$.

5p a) Rezolvați în $\mathbf{Z}$ ecuația $x \circ x = 7$.

5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție.

5p c) Aflați elementele simetrizabile ale legii de compoziție.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$.

5p a) Scrieți ecuația tangentei la graficul lui f în punctul graficului de abscisă $x_0 = 0$.

5p b) Determinați punctele de inflexiune ale graficului lui f.

5p c) Arătați că: $e^x \geq \frac{x^2}{2} + x + 1, (\forall) x \geq 0$.

2. Fie $f: (0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

5p a) Calculați $\int x \cdot f(x)dx$.

5p b) Calculați $\int_1^e f(x)dx$.

5p c) Folosind eventual inegalitatea $\ln x \leq x - 1, (\forall) x > 1$, arătați că $\int_1^e f(x)dx \leq e - 2$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 19

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al nouălea termen al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_2 = 3$ și $a_4 = 11$.

5p **2.** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$. Arătați că vârful parabolei asociate funcției este situat pe dreapta de ecuație $x + 2y = 0$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_2(x+3) - \log_2 5 = \log_2(x+1) + \log_2 3$.

5p **4.** Câte submulțimi ordonate cu două elemente are mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$.

5p **5.** Fie $A(1,2)$, $B(2,-1)$ și $C(3,4)$. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Dacă $\sin(90^\circ - x) = \frac{2}{5}$, calculați $\cos(180^\circ - x)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $\Delta(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & b \\ 4 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.

5p a) Calculați $\Delta(2,3)$.

5p b) Arătați că: $\Delta(a,b) = (a-2)(b-2)(b-a)$.

5p c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $\Delta(2^x, 4^x) = 0$.

2. Pe $\mathbf{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă:

$$x \circ y = xy - x - y + 2, (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

5p a) Arătați că $x \circ y = (x-1)(y-1) + 1, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

5p b) Arătați că:

$x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_n - 1) + 1, (\forall) x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$

5p c) Calculați $\frac{3}{2} \circ \frac{5}{3} \circ \frac{7}{4} \circ \ldots \circ \frac{19}{10}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = x\cdot e^x - x + 1$.

5p a) Calculați $f'(x), x \in \mathbf{R}$.

5p b) Determinați punctele de inflexiune ale funcției.

5p c) Arătați că: $\frac{e^{\sqrt{2}} - 1}{e^e - 1} < \frac{e}{\sqrt{2}}$.

2. Fie $n \in \mathbf{N}^*$ și $f_n : (-1,\infty)\to\mathbf{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{x+1}$.

5p a) Calculați $\int (x+1)\cdot f_3(x)dx$.

5p b) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_2, axa Ox și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Arătați că: $\int_0^1 f_{2016}(x)dx \leq \frac{1}{2017}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 20

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Stabiliți dacă 2017 este termen al progresiei aritmetice: $1, 4, 7, \ldots$

5p **2.** Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 2x + m$. Determinați $m \in \mathbf{R}$, astfel încât valoarea minimă a funcției să fie 2.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 2$.

5p **4.** Câte numere de trei cifre se pot forma cu cifrele 0, 1 și 2.

5p **5.** Dacă $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 3$ și $AD = 4$, calculați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

5p **6.** În triunghiul ABC în mijloc avem $AB = 5$ și $AC = 4$, iar $m(\hat{A}) = 45°$. Calculați aria triunghiului ABC.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ a & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

5p a) Calculați $\det A(2)$.

5p b) Determinați $a \in \mathbf{R}$ pentru care $A(a)$ nu este inversabilă.

5p c) Arătați că $A^2(1) = 3A(1)$ și calculați $A^n(1), n \in \mathbf{N}^*$.

2. Fie $f \in \mathbf{R}[X], f = X^3 - 2mX^2 + X - 2$.

5p a) Pentru $m = 2$, calculați $f(1)$.

5p b) Determinați $m \in \mathbf{R}$, astfel încât $f \vdots X - 2$.

5p c) Pentru $m = 1$ determinați rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 \ln x$.

5p a) Calculați $f'(x), x \in (0, \infty)$.

5p b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției.

5p c) Arătați că: $f(x) \geq -\frac{1}{3e}, (\forall) x \in (0, \infty)$.

2. Fie $f, F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = e^x(x^2 + x + 1), F(x) = e^x(x^2 - x + 2)$.

5p a) Arătați că F este o primitivă a lui f.

5p b) Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare.

5p c) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul lui f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 21

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I. (30 de puncte)

5p **1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2 = 6$ și $a_3 = 5$. Calculați a_4.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x + 2$. Calculați $(f \circ g)(-2)$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_2(x^2 + 5) = 4$.

5p **4.** Determinați câte submulțimi cu două elemente are mulțimea: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

5p **5.** Să se determine $m \in \mathbf{R}$, pentru care vectorii $\vec{v} = (m+1)\vec{i} + m\vec{j}$ și $\vec{u} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{6}$, $m(\sphericalangle A) = 30°$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați $A^2 - 5A + 4I_2$.

5p b) Verificați dacă $A \cdot B = B \cdot A$.

5p c) Calculați $\det(A \cdot B) + \det A - \det B$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.

5p a) Să se arate că: $x * y = (x-5)(y-5) + 5, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $x * x = 6$.

5p c) Să se calculeze: $1 * 2 * 3 * \ldots * 2018$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f : \mathbf{R} \setminus \{-2\} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$.

5p a) Calculați limitele laterale ale lui f în punctul $x_0 = -2$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f spre $-\infty$.

5p c) Arătați că f este convexă pe $(-\infty, -2)$.

2. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = e^{-x}$.

5p a) Calculați: $\int_0^1 f(x)dx$.

5p b) Calculați: $\int_0^1 xf(x^2)dx$.

5p c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0, 1] \to \mathbf{R}, g(x) = f(x)$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 22

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2$ este natural.

5p **2.** Calculați modulul numărului complex $z=\sqrt{3}+i$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $2^x+4^x-6=0$.

5p **4.** Câte numere de 2 cifre se pot forma cu cifrele: $1,2,3$?

5p **5.** Determinați ecuația dreptei AB, unde $A(1,2)$ și $B(3,4)$.

5p **6.** Calculați $\mathbf{R}$, raza cercului circumscris triunghiului isoscel ABC, unde $AB=6, m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$.

5p a) Calculați: A^2 și B^2.

5p b) Verificați că: $A^2+B^2=38I_2$.

5p c) Calculați: $\det(A\cdot B)$.

2. Se consideră în $\mathbf{R}[X]$ polinomul $f=X^3+3X^2-3X-1$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

5p a) Arătați că polinomul f se divide cu $X-1$.

5p b) Calculați: $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p c) Calculați: $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$.

5p a) Arătați că: $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}, x\in(0,\infty)$.

5p b) Arătați că: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{4}{9}$.

5p c) Determinați ecuația tangentei în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

2. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=3^x+3^{-x}$.

5p a) Calculați $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

5p b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$ și convexă pe $[0,\infty)$.

5p c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbf{R}, g(x)=3^{-x}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 23

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I. (30 de puncte)

5p **1.** Calculați suma primilor 6 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 2,\ a_2 = 5$.

5p **2.** Determinați $m \in \mathbf{R}$, astfel încât ecuația $x^2 + mx + 9 = 0$ să admită două soluții reale și egale.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_2(x^2 - 10) = 3$.

5p **4.** Câte numere de 3 cifre distincte se pot forma cu cifrele din mulțimea $\{3,4,5,6,7\}$?

5p **5.** Fie punctele $A(1,3)$, $B(3,1)$ în reperul xOy și M mijlocul segmentului AB. Calculați lungimea segmentului OM.

5p **6.** În triunghiul ABC, $BC = 10$, $AC = 5$ și $AB = 5\sqrt{3}$. Calculați $\cos A$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați $\det(A+B)$.

5p b) Determinați A^{-1}.

5p c) Rezolvați în $M_2(\mathbf{R})$ ecuația $AX = B$.

2. Pe mulțimea $M = (-4, \infty)$ se definește legea $x * y = 3xy + 12x + 12y + 44$.

5p a) Să se arate că $x * y = 3(x+4)(y+4) - 4$.

5p b) Să se arate că legea " $*$ " admite element neutru.

5p c) Să se rezolve în M ecuația $x * x * x = 5$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f: (1,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x), x \in (1,\infty)$.

5p b) Arătați că: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = -1$.

5p c) Să se arate că f este descrescătoare pe $(1,\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f, g: [1,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ și $g(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

5p a) Să se arate că f este o primitivă a funcției g.

5p b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) \cdot g(x)dx$.

5p c) Să se determine numărul real $a \in (1,\infty)$, astfel încât $\int_1^a f(x)dx = 2$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 24

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\sqrt[3]{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}$ este natural.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $2^{x^2-4x}=\frac{1}{8}$.

5p **3.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cubul unui număr natural.

5p **4.** Să se determine $n\in\mathbf{N}$, astfel încât: $C_{n+1}^{1}=n^2-1$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$, $B(5,-2)$. Să se determine ecuația dreptei AB.

5p **6.** Să se determine lungimea laturii BC în triunghiul ABC, știind că $AC=6$, $AB=4$ și $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x&y\\0&6\end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbf{R}$.

5p a) Să se determine numărul real x, astfel încât: $A\cdot B=B\cdot A$.

5p b) Să se verifice că $A^2=4(A-I_2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p c) Determinați numărul real a, astfel încât $A^3-aA^2+4A=O_2$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$

2. Fie polinomul $f=X^4+3X^3-3X+1$, x_1,x_2,x_3,x_4 sunt rădăcinile sale.

5p a) Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=f(-a)$.

5p b) Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

5p c) Determinați rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-e\ln x$.

5p a) Să se calculeze: $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

5p b) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)}{f'(x)}$.

5p c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+x\ln x$ și $g(x)=2x+\ln x+1$.

5p a) Să se arate că f este o primitivă a funcției g.

5p b) Să se calculeze: $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx$.

5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 25

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_3 = 5$ și $a_6 = 11$. Să se calculeze a_{10}.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x-3$. Să se calculeze: $f(0)+f(6)+f(12)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $\log_3(x^2-1)=1$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{3,4,5,6\}$, acesta să verifice inegalitatea: $n(n-1)\geq 20$.

5p **5.** Se consideră punctul $M(2,3)$ și dreapta de ecuație $2x+y-5=0$. Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin M și este paralelă cu d.

5p **6.** Raza cercului circumscris triunghiului ABC este $R=3$ iar $AC=6$. Calculați $\sin B$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculați $\det A$.

5p b) Arătați că: $A^2-6A=I_2$.

5p c) Determinați inversa matricei $B=A-6I_2$.

2. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție: $x*y=xy+x+y$.

5p a) Arătați că legea "$*$" este asociativă.

5p b) Determinați elementul neutru al legii "$*$".

5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale $x^2*2=x*4$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.

5p a) Calculați $f'(x), x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

5p b) Demonstrați că funcția f admite două puncte de extrem.

5p c) Determinați ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la g graficul funcției f.

2. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x-\dfrac{1}{x^2+9}$.

5p a) Calculați: $\int_0^1 (x^2+9)f(x)dx$.

5p b) Calculați: $\int_{\sqrt{3}}^{3} f(x)dx$.

5p c) Calculați volumul corpului de rotație obținut prin rotația graficului funcției g în jurul axei Ox, pe $[0,1]$, unde $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x^2+9}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 26

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $z=\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i-1}$ este real, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2-5x+6\le 0$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale, ecuația: $\log_2^2 x+7\log_2 x+12=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $M=\{2,4,6,\ldots,2014\}$, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(2,3)$. Să se scrie ecuația mediatoarei dreptei AB.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{5}{\sqrt{3}}$, să se calculeze $\sin 2x$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră $\Delta(x)=\begin{pmatrix} x-2 & -2 & 0 \\ -1 & x-1 & 2 \\ 2 & 2 & x-3 \end{pmatrix}, x\in\mathbf{R}$.

5p a) Să se calculeze $\Delta(6)$.

5p b) Să se calculeze $\Delta(x)$ și să se scrie rezultatul sub formă de produs.

5p c) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $\Delta(5^x)=0$.

2. Fie polinomul $f\in\mathbf{R}[X]$, $f=mX^4+nX^3-1$, $m\neq 0$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4.

5p a) Să se determine $m,n\in\mathbf{R}$, astfel încât polinomul f să se dividă cu X^2-4.

5p b) Pentru $m=1$ și $n=0$, să se determine rădăcinile polinomului f.

5p c) Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$, pentru $m=2$ și $n=-1$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

5p a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.

5p c) Să se arate că graficul funcției f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Fie funcția $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=(x^2+4x+6)e^x$.

5p a) Determinați funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, știind că F este primitivă lui f.

5p b) Calculați: $\int_0^1 (x+3)^2e^x dx$.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2\cdot e^x}\int_0^x F(t)dt$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 27

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați modulul numărului complex $z = 3 + 2(1 - i)$.

5p **2.** Calculați $x_1 + x_2 + 2x_1x_2$, dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 3x + 10 = 0$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $4^{x+2} = 2^{x^2+5}$.

5p **4.** Câte numere formate din 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4\}$?

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(1, 1)$, $C(3, -1)$. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, dacă $AC = 6$ și $\cos B = \frac{4}{5}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră $X(a) = \begin{pmatrix} 1-6a & 2a \\ -21a & 1+7a \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}$.

5p a) Să se arate că: $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab), (\forall) a, b \in \mathbf{R}$.

5p b) Să se arate că există $a' \in \mathbf{R}$, astfel încât $X(a) \cdot X(a') = I_2$, pentru orice $a \neq -1$.

5p c) Să se calculeze: $X(1) \cdot X(2) \cdot \ldots \cdot X(n), n \in \mathbf{N}^*$.

2. Fie polinomul $f = X^3 + 3X^2 - 4X + 1$ și x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.

5p a) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f, la polinomul $X^2 - 1$.

5p b) Calculați: $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.

5p c) Calculați: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

5p a) Arătați că dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru graficul funcției f.

5p b) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul de abscisă $x_0 = -2$.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x}$.

2. Fie funcțiile $f, F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ și $F(x) = (ax + b)\sqrt{x^2 + 1}$.

5p a) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât F să fie primitivă a lui f.

5p b) Pentru $a = 1$, $b = 1$, arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

5p c) Pentru $a = 1$, $b = 1$, să se arate că funcția F are un singur punct de inflexiune.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 28

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{1+5i}{2+3i}$.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecție cu axele de coordonate ale graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-1$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$, ecuația: $\log_5(3x+1)=1+\log_5(x-1)$.

5p **4.** Să se determine numărul natural n, $n\geq 1$ știind că $A_n^1+C_n^1=10$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: 5x-4y+1=0$.

5p **6.** Calculați raza cercului înscris în triunghiul care are laturile de lungimi 5, 6 și 3.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul de ecuații $\begin{cases} x-ay-z=0 \\ x+4y-2z=16, a\in\mathbf{R} \\ x-2y+2z=-6 \end{cases}$.

5p a) Determinați $a\in\mathbf{R}$, astfel încât A să fie inversabilă, A fiind matricea sistemului.

5p b) Determinați $a\in\mathbf{R}$, pentru care $\det(A^2)=100$.

5p c) Rezolvați sistemul pentru $a=1$.

2. Pe $\mathbf{R}$ se definește legea asociativă $x*y=xy-2x-2y+6$.

5p a) Să se arate că $x*y*z=(x-2)(y-2)(z-2)+2, (\forall)x,y,z\in\mathbf{R}$.

5p b) Să se determine elementele inversabile în raport cu legea "$*$".

5p c) Să se rezolve în $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ecuația: $\log_2 x * \log_3 y = 2$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\ln(x^2+2)-\ln(x^2+1)$.

5p a) Calculați: $f'(x)$.

5p b) Studiați monotonia funcției f.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$.

5p a) Să se calculeze: $\int_1^e x\left(f(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$.

5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $(0,\infty)$.

5p c) Să se arate că: $\int_1^2 f'(x)f(x)dx=-\frac{22}{81}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 29

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x-3$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **2.** Să se rezolve ecuația: $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$.

5p **3.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, o progresie aritmetică de rație 3, dacă $a_2+a_5=19$, determinați a_{10}.

5p **4.** Câte funcții injective $f:\{1,2,3,5\}\to\{0,1,2,3,4,5\}$ există?

5p **5.** Calculați lungimea medianei din A a triunghiului ABC, știind că $AB=10$ cm, $AC=24$ cm și $BC=26$ cm.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}+\vec{j}$, $a\in\mathbf{R}$. Determinați a astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie coliniari.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $B(a)=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&0\\3a&0&1\end{pmatrix}$, $a\in\mathbf{R}$.

5p a) Arătați că: $\det(B(1))=-2$.

5p b) Arătați că: $B(a)+B(b)=2B\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $(\forall)\,a,b\in\mathbf{R}$.

5p c) Determinați numerele $x\in\mathbf{R}$, astfel încât: $B(x^2+1)\cdot B(x)=B(x^2+x+1)$.

2. Fie $f\in\mathbf{R}[X]$, $f=X^3-3X^2+aX-2$, $a\in\mathbf{R}$.

5p a) Arătați că $f(2)=2(a-3)$.

5p b) Determinați numărul real a știind că f este divizibil cu X^2-X+1.

5p c) Pentru $a=3$, rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $f(2^x)=0$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\ln(x^2+1)$.

5p a) Calculați $f'(x)$, $x>0$.

5p b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în $A(1,f(1))$.

5p c) Studiați monotonia funcției f.

2. Fie $f_n:\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbf{R}, f_n(x)=\frac{\sin^n x}{9+\cos^2 x}$ și $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}} f_n(x)dx$, unde $n\in\mathbf{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_1.

5p b) Să se demonstreze că pentru $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$, avem $0\leq f_n(x)\leq f_n\left(\frac{\pi}{3}\right), n\in\mathbf{N}^*$.

5p c) Să se determine limita șirului $(I_n)_{n\geq 1}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 30

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+2$. Calculați $(f\circ f)(-1)$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $4^{2x}-5\cdot 4^x+4=0$.

5p **3.** Determinați al patrulea termen al dezvoltării binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^9$, $x>0$.

5p **4.** Determinați numărul complex z, știind că: $z+2\bar{z}=-3-5i$.

5p **5.** Calculați aria triunghiului ABC știind că $AB=5$ cm, $AC=12$ cm și $BC=13$ cm.

5p **6.** Dacă $a\in\mathbf{R}$, astfel încât $\sin 2a=\frac{1}{2}$, arătați că: $\sin^4 a+\cos^4 a=\frac{7}{8}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} -mx+y+z=-1 \\ x-my+z=m \\ x+y-z=2 \end{cases}$, unde m este parametru real.

5p a) Să se determina valorile lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p b) Să se rezolve sistemul pentru $m=-1$.

5p c) Să se arate că pentru $m=3$ sistemul nu are soluții.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă:

$$x*y=xy-3x-3y+12.$$

5p a) Arătați că: $x*y=(x-3)(y-3)+3, (\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

5p b) Determinați numerele $n\in\mathbf{N}$ astfel încât $n*n=12$.

5p c) Calculați: $\sqrt{1}*\sqrt{2}*\ldots*\sqrt{2017}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}-\{1\}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$.

5p a) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$.

5p b) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

5p c) Să se scrie ecuația tangentei în $A(2,f(2))$ lagraficul funcției f.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, unde $I_0=\int_0^1 e^x dx$ și $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx, (\forall)n\geq 1$.

5p a) Calculați I_0 și I_1.

5p b) Să se arate că: $I_{n+1}=e-(n+1)I_n, (\forall)n\geq 0$.

5p c) Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 31

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=x^2+1$. Știind că f este inversabilă, calculați $f^{-1}(2)$.

5p **2.** Dacă $z=\frac{2-i}{4+3i}$, calculați $\mathrm{Re}(z)$.

5p **3.** Calculați suma primilor 6 termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi, dacă $b_1+b_2=3$ și $b_3+b_4=12$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un element din mulțimea $\{1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3},\ldots,\sqrt[3]{64}\}$ acesta să fie rațional.

5p **5.** În reperul xOy se consideră punctele $A(2,-2)$ și $B(5,3)$. Determinați coordonatele punctului C din plan, astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. În $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1-3a & 6a\\ -2a & 1+4a\end{pmatrix}, a\in\mathbf{R}$.

5p a) Calculați determinantul matricei $X(1)$.

5p b) Să se arate că pentru orice $a,b\in\mathbf{R}$, avem: $X(a)\cdot X(b)=X(ab+a+b), (\forall)n\in\mathbf{N}^*$

5p c) Să se demonstreze că: $(X(1))^n=X(2^n-1)$.

2. În $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră mulțimea: $G=\left\{\begin{pmatrix}a & 2b\\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbf{Z}, a^2-2b^2=1\right\}$.

5p a) Să se arate că $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$.

5p b) Arătați că G este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

5p c) Să se arate că mulțimea G conține o infinitate de elemente.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p a) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

5p b) Să se studieze monotonia lui f.

5p c) Să se scrie ecuația tangentei în $A(1,f(1))$ la graficul funcției.

2. Fie șirul de integrale definite $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n=\int_0^1 \frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx, (\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

5p a) Calculați I_1.

5p b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

5p c) Folosind eventual inegalitatea $\ln(1+x)\leq x, (\forall)x\geq 0$, calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 32

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se determine suma primilor douăzeci de termeni ai unei progresii aritmetice dacă $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 30$.

5p **2.** Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 3x + m, m \in \mathbf{R}$. Să se determine m real așa încât graficul funcției să intersecteze axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Care este probabilitatea ca un element n din mulțimea $\{1, 2, 4, 8\}$ să verifice relația $2^n \leq 3 + \log_2 n$.

5p **4.** Arătați că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 9\vec{i} + 6\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **5.** Fie triunghiul ABC cu $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $BC = 10$ cm. Calculați lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC.

5p **6.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt{x+3} - \sqrt[4]{x+3} = 12$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se verifice că: $A^2 = B^2 = I_2$.

5p b) Să se arate că: $AB \neq BA$.

5p c) Să se calculeze: $A + A^2 + \ldots + A^{2018}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă:

$$x * y = 2xy - 6x - 6y + 21, (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

5p a) Să se verifice că: $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

5p b) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $x * x * x = 3$.

5p c) Să se găsească două elemente $x, y \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$ pentru care $x * y \in \mathbf{Z}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

5p a) Calculați $f'(x), x \in \mathbf{R}$.

5p b) Să se arate că: $0 < f(x) \leq \dfrac{1}{2}, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

5p c) Să se determine asimptota spre ∞ la graficul funcției f.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \geq 0}$, unde $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+3} dx$ și $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{2x+3} dx, (\forall) n \geq 1$.

5p a) Să se calculeze I_0 și I_1.

5p b) Să se arate că: $2I_{n+1} + 3I_n = \dfrac{1}{n+1}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

5p c) Să se calculeze: $\lim\limits_{n \to \infty} (nI_n)$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 33

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Fie numerele complexe $z_1 = 2+5i$, $z_2 = 1-5i$. Arătați că numărul $z_1 + z_2$ este real.

5p **2.** Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x-2$ și $g(x) = 4x$. Calculați $(f \circ g)(2)$.

5p **3.** Dacă x_1, x_2 sunt soluții reale ale ecuației $x^2 - 6x + 3 = 0$, să se arate că:
$$2(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 0.$$

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre, acesta să fie divizibil cu 11.

5p **5.** În reperul xOy se consideră dreapta d de ecuație d: $y = 5x - 1$ și punctul $A(2,3)$. Determinați ecuația paralelei duse prin A la dreapta d.

5p **6.** Dacă în triunghiul ABC avem $m(\hat{A}) = 60°$, $AB = 4\text{cm}, AC = 6\text{ cm}$, calculați aria triunghiului ABC.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+5z=0 \end{cases}$ și A matricea sa.

5p a) Calculați determinantul lui A.

5p b) Să se rezolve sistemul.

5p c) Determinați acele soluții (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 24$.

2. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + aX + b$.

5p a) Să se determine parametrii reali a și b, știind că f este divizibil cu $X-1$ și că $f(-2) = 3$.

5p b) Pentru $a = -4$ și $b = 3$, calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale lui f.

5p c) Pentru $a = b = 3$, aflați câtul și restul împărțirii lui f la $X^2 + X + 1$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră $f : (0,\infty) \to (0,\infty), f(x) = \ln(x+1) - \ln x$.

5p a) Calculați $f'(x), x \in (0,\infty)$.

5p b) Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{\ln(n^2+1)}$.

5p c) Arătați că f este inversabilă și calculați $(f^{-1})'(\ln 2)$.

2. Se consideră șirul de integrale definite $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n = \int_0^1 (x-x^2)^n dx, (\forall) n \geq 1$.

5p a) Să se calculeze I_1.

5p b) Demonstrați inegalitatea: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n} (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

5p c) Arătați că: $I_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{n-1}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 34

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați media aritmetică a numerelor $a = \sqrt[3]{8}$ și $b = \log_2 16$.

5p **2.** Aflați valoarea minimă a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = x^2 + 4x + 6$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $9^x - 4\cdot 3^x + 3 = 0$.

5p **4.** Prețul unui obiect este de 300 de lei. Care va fi prețul după două ieftiniri succesive de 10% și 5%.

5p **5.** Să se calculeze $\cos x + \sin 2x$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{3}{5}$.

5p **6.** Scrieți ecuația medianei AM a triunghiului ABC dacă $A(3,3)$, $B(4,6)$ și $C(-2,4)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $M(a) = \begin{pmatrix} 2a-6 & 1 \\ 1 & 2a-6 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M(a), I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

5p a) Calculați $\det M(4)$.

5p b) Determinați $a \in \mathbf{R}$, știind că: $\det M(a) = 0$.

5p c) Determinați $a \in \mathbf{R}$, știind că: $M^2(a) = I_2$.

2. Pe $\mathbf{R}$ se consideră legea "$*$" definită prin: $x * y = 2xy - 4x - 4y + 10, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

5p a) Demonstrați că: $x * y = 2(x-2)\cdot(y-2) + 2, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

5p b) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $x * x = 4$.

5p c) Calculați: $1 * \sqrt{2} * \sqrt{3} * \ldots * \sqrt{2017}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = e^x + x + 1$.

5p a) Calculați $f'(x)$ pentru $x \in \mathbf{R}$.

5p b) Arătați că f este convexă pe $\mathbf{R}$.

5p c) Să se scrie ecuația tangentei în $A(1, f(1))$ la graficul funcției.

2. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2\cdot e^x + 5$.

5p a) Să se calculeze: $\int_1^2 f(x)dx$.

5p b) Demonstrați că $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} + 5x + 2e^x$ este o primitivă a funcției f pe $\mathbf{R}$.

5p c) Să se calculeze: $\int (x\cdot f(x) - 2xe^x)dx$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 35

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați: $\sqrt[3]{64}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\log_2 16$.

5p **2.** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-3x-5$. Calculați valoarea minimă a funcției f.

5p **3.** Fie $z=\frac{3+i}{4-2i}$. Calculați $\overline{z}$.

5p **4.** În câte moduri pot fi aranjate 6 cărți pe un raft?

5p **5.** Fie o dreaptă d de ecuație d: $3x-y+5=0$. Scrieți ecuația paralelei prin $A(1,2)$ la dreapta dată d.

5p **6.** Dacă $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos a=\frac{3}{5}$, calculați $\sin 2a$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

5p a) Calculați: $\det B$.

5p b) Calculați: $A\cdot B-B\cdot A$.

5p c) Determinați numărul real x pentru care $\det(B+xA)=2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă:

$$x*y=xy-2x-2y+6,(\forall)x,y\in\mathbf{R}.$$

5p a) Calculați $x*2$ și $2*x,(\forall)x\in\mathbf{R}$.

5p b) Determinați elementul neutru al legii "$*$".

5p c) Calculați: $0*1*2*3*\ldots*2018$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x^2-5}{x^2+5}$.

5p a) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\ln f(x)$.

5p b) Calculați: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p c) Arătați că f este convexă pe $\left[\frac{-\sqrt{15}}{3},\frac{\sqrt{15}}{3}\right]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+5x+2$.

5p a) Calculați: $\int_0^1 f(x)dx$.

5p b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbf{R}, g(x)=f(x)-5x-2$.

5p c) Calculați: $\int_0^1 \ln f(x)dx$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 36

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Demonstrați că $z = 3(2+5i) - 5(2+3i)$ este real.

5p **2.** Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x - 3$. Calculați: $f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(10)$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_2(5x-2) = 3$.

5p **4.** Într-o progresie aritmetică, avem $a_1 = 3$, $a_{10} = 21$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei aritmetice.

5p **5.** Calculați perimetrul triunghiului ABC dreptunghic în A, cu $AB = 6$ cm, $m(\hat{C}) = 30°$.

5p **6.** Dacă $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$, calculați lungimea vectorului $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(t) = \begin{pmatrix} 2+t & 1 \\ -5 & 2+t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$.

5p a) Calculați: $\det A(0)$.

5p b) Calculați: $A(1) \cdot A(2)$.

5p c) Calculați: $A(1) + A(2) + \ldots + A(10)$.

2. Fie polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X + 2, f \in \mathbf{R}[X]$.

5p a) Calculați: $f(2) + f(-2)$.

5p b) Arătați că f este divizibil cu $X+2$.

5p c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile lui f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 3x$.

5p a) Calculați: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p b) Să se scrie ecuația tangentei în $A(1, f(1))$ la graficul funcției.

5p c) Studiați monotonia lui f.

2. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

5p a) Calculați: $\int_0^1 \dfrac{x \cdot f(x)}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

5p b) Calculați: $\int f(x)dx$.

5p c) Calculați aria suprafeței plane determinate de graficul funcției, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 37

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $(2x-1)^2 = 9$.

5p **2.** Calculați: $4C_5^3 - A_4^2$.

5p **3.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4), B(1,5)$ și $C(-3,1)$. Să se scrie ecuația medianei AM a triunghiului ABC.

5p **4.** Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $M = \{1,2,5,8\}$.

5p **5.** Aflați aria triunghiului ABC, știind că $m(\widehat{B}) = 60°$, $AB = 6$ cm și $BC = 8$ cm.

5p **6.** Calculați $f(2) + f(-2)$ pentru $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5p a) Determinantul matricei A.

5p b) Calculați A^2.

5p c) Determinați inversa lui A.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă:

$$x * y = 2xy - 4x - 4y + 10.$$

5p a) Determinați elementul neutru al legii " $*$ ".

5p b) Demonstrați că: $x * y = 2(x-2)(y-2) + 2, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

5p c) Arătați că $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-2)^n + 2, (\forall) x \in \mathbf{R}. (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

5p a) Calculați $f'(x)$ pentru $x \in \mathbf{R}$.

5p b) Scrieți ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul lui f.

5p c) Demonstrați că: $-1 \le f(x) \le \frac{3}{5}, (\forall) x \in [0,2]$.

2. Fie funcțiile $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}, f_n(x) = x^n e^x$, pentru $n \in \mathbf{N}$.

5p a) Calculați: $\int_0^1 f_1(x)dx$.

5p b) Calculați: $\int (f_2(x) - f_1(x))dx$.

5p c) Arătați că: $\int_0^1 f_n(x)dx \ge \frac{1}{n+1}, (\forall) n \in \mathbf{N}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 38

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x-2$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **2.** Calculați: $2(2-5\sqrt{2})+10\sqrt{2}$.

5p **3.** Să se determine x, $x\in\mathbf{R}$ dacă $x, 3$ și $2x+9$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **4.** Prețul unui obiect este 300 de lei. Aflați prețul obiectului după o ieftinire cu 20%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy fie punctele $A(1,3)$ și $B(2,5)$. Scrieți ecuația dreptei AB.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=5$ cm, $AC=8$ cm și $BC=9$ cm.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A(t)=\begin{pmatrix} 2 & t+3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A(t)\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

5p a) Calculați determinantul matricei $A(1)$.

5p b) Calculați: $A(0)\cdot A(3)$.

5p c) Determinați inversa matricei $A(2)$.

2. Fie polinomul $f=X^3+X^2+X+m, m\in\mathbf{R}, f\in\mathbf{R}[X]$ cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale lui f.

5p a) Pentru $m=3$, aflați câtul și restul împărțirii lui f la X^2+1.

5p b) Determinați m, știind că $X-1$ divide f.

5p c) Pentru $m=2$, calculați: $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=2x-2\ln x$.

5p a) Calculați $f'(x), x>0$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,f(1))$.

5p c) Arătați că: $x\geq\ln x+1, (\forall)x\in(0,\infty)$.

2. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(x^2+1)e^x$.

5p a) Calculați: $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx$.

5p b) Determinați primitiva F a lui $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, știind că $F(0)=1$.

5p c) Aflați aria suprafeței determinate de Gf, axa Ox și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=1$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 39

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați $x \in \mathbf{R}$, astfel încât $[x] = 7$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

5p **2.** Determinați valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2x + m$ verifică inecuația $f(x) \geq 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în $[0, \pi]$ ecuația: $\cos 6x + \sqrt{3} \cos 3x + 1 = 0$.

5p **4.** Aflați numărul termenilor raționali ai dezvoltării: $(\sqrt[3]{5} - \sqrt{20})^{20}$.

5p **5.** Fie punctele A, B, C și D de afixe $z_A = -2 + 3i$, $z_B = 5 + i$, $z_C = 7 - 4i$ și $z_D = a + bi$, unde $a, b \in \mathbf{R}$. Determinați a și b, astfel încât $ABCD$ să fie paralelogram.

5p **6.** Arătați că $(2\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - 2\cos x)^2 = 5$, pentru orice număr real x.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul: $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$. Notăm $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

5p a) Determinați a, astfel încât sistemul să aibă soluție unică.

5p b) Determinați a, astfel încât sistemul să fie incompatibil.

5p c) Pentru $a = 1$, să se rezolve sistemul.

2. Fie $G = (-2, 2)$ și legea asociativă $x * y = \dfrac{4x + 4y}{xy + 4}, (\forall) x, y \in G$.

5p a) Să se arate că pentru orice $x, y \in G$, avem: $x * y \in G$.

5p b) Să se studieze existența elementului neutru al legii "$*$".

5p c) Fie $f: (-2, 2) \to (0, \infty), f(x) = \dfrac{2 + x}{2 - x}$. Să se arate că
$f(x * y) = f(x) \cdot f(y), (\forall) x, y \in G$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}}$.

5p a) Să se arate că $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, (\forall) x > 0$.

5p b) Să se arate că f este descrescătoare pe $(0, \infty)$.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{n \to \infty} (f(1) + \ldots + f(n))^{\sqrt{3n+1}}$.

2. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^{2017} + x + 1$.

5p a) Calculați: $\int_0^1 f(x)dx$.

5p b) Să se arate că f este bijectivă.

5p c) Fie g inversa lui f. Să se calculeze: $\int_1^3 g(x)dx$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 40

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_5+a_8+a_{12}+a_{17}=100$, calculați suma primilor douăzeci de termeni ai progresiei.

5p **2.** Fie $z=(1-i)^{2018}+(1+i)^{2017}$. Calculați $\mathrm{Re}(z)$ și $|z|$.

5p **3.** Determinați $n\in\mathbf{N}$ pentru care: $C_{2n-3}^{2}=3$.

5p **4.** În reperul xOy considerăm dreapta d de ecuație d: $3x+4y+5=0$ și punctul $A(1,2)$. Calculați coordonatele punctului B situat pe dreapta d, pentru care $AB\perp d$.

5p **5.** Determinați termenul din dezvoltarea $\left(x\sqrt[4]{x}-\frac{1}{x}\right)^{8}, x>0$ care conține pe x^1.

5p **6.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea: $f(1)=f(4)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $M(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

5p a) Arătați că: $M(a)\cdot M(b)=M(2ab),(\forall)\,a,b\in\mathbf{R}$.

5p b) Arătați că: $2(M(a))^n=M((2a)^n),(\forall)\,n\geq 1$.

5p c) Determinați $n\in\mathbf{N}$, astfel încât $(M(1))^n=M(512)$.

2. Se consideră inelul $(\mathbf{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbf{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.

5p a) Rezolvați în $\mathbf{Z}_6$ ecuația $\hat{4}\cdot x+\hat{3}=\hat{5}$.

5p b) Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbf{Z}_6\to\mathbf{Z}_6, f(x)=x^2-\hat{2}\cdot x$.

5p c) Determinați numărul de elemente ale mulțimii $H=\{x^3 \mid x\in\mathbf{Z}_6\}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{x^2+mx+5}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p a) Să se determine asimptotele la graficul funcției.

5p b) Să se arate că: $f'(x)=\dfrac{x^3-3x+m}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}},(\forall)\,x\in\mathbf{R}$.

5p c) Să se determine m astfel încât f să aibă trei puncte de extrem.

2. Fie $f:(-2,2)\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

5p a) Calculați: $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p b) Calculați: $\int_0^1 f(x)\arccos\frac{x}{2}dx$.

5p c) Arătați că $\int_{-1}^{0} f(x^2)dx=\int_0^1 f(x^2)dx$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 41

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați: $49^{\log_7 6} - \sqrt[3]{27}$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+mx+1+m$, $m\in\mathbf{R}$. Determinați $m\in\mathbf{R}$, astfel încât $f(x)\geq m, (\forall)x\in\mathbf{R}$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $8\lg^2 x-3\lg x-11=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele diferite.

5p **5.** În reperul cartezian xOy considerăm punctele $A(-1,5)$ și $B(2,6)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin origine și este perpendiculară pe AB.

5p **6.** Determinați termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^{10}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie mulțimea $H=\{A\in\mathcal{M}_3(\mathbf{Q}) \mid \det A\neq 0 \text{ și } A^{-1}=A^2+A\}$.

5p a) Arătați că dacă $A\in H$, atunci $A^3+A^2-I_3=O_3$.

5p b) Arătați că dacă $A\in H$ și $P\in\mathcal{M}_3(\mathbf{Q})$ este o matrice inversabilă, atunci $P^{-1}\cdot A\cdot P\in H$.

5p c) Arătați că nu există $a\in\mathbf{Q}^*$, astfel încât $a\cdot I_3\in H$.

2. Fie $f\in\mathbf{Z}[X], f=X^4-3X+1$ și rădăcinile sale $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{C}$.

5p a) Arătați că f admite cel mult două rădăcini reale.

5p b) Calculați: $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$.

5p c) Arătați că dacă $x\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$, atunci $f(x)\notin\mathbf{Z}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\ln(x^2+2)-\ln(x^2+1)$.

5p a) Calculați: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

5p b) Să se arate că f este strict crescătoare pe $(-\infty,0]$ și strict descrescătoare pe $[0,\infty)$.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2)f(x)$.

2. Fie șirul de integrale definite $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$, $n\geq 1$.

5p a) Calculați: I_1.

5p b) Demonstrați că $I_n=\dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}, (\forall)n\geq 2$.

5p c) Folosind eventual că $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}<\dfrac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}<\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}, (\forall)n\in\mathbf{N}^*$, calculați: $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 42

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$.

5p **2.** Determinați $m \in \mathbf{R}$, cu proprietatea că vârful parabolei asociată funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+(3m-1)x+m^2+m$ să fie în cadranul al II-lea al reperului xOy.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt{x-1}=4-x$.

5p **4.** Rezolvați în $\mathbf{C}$ ecuația: $3\bar{z}+2z=1-i$.

5p **5.** Fie $ABCD$ un paralelogram în care $AB=8$, $BC=3$ și $m(\hat{A})=60°$. Aflați distanța de la D la AC.

5p **6.** Fie punctele $A(1,4), B(3,1), C(-1,1)$. Să se determine lungimea înălțimii din A în triunghiul ABC.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $f:\mathcal{M}_2(\mathbf{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), f(X)=AX+XA$.

5p a) Să se calculeze $\det A$.

5p b) Să se arate că: $f(aX)=af(X), (\forall)\, a\in\mathbf{R}$.

5p c) Să se demonstreze că: $f(X+Y)=f(X)+f(Y), (\forall)\, X, Y\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. Pe mulțimea $G=(-2,2)$ se consideră operația algebrică $x\circ y=\dfrac{4x+4y}{4+xy}$.

5p a) Să se determine elementul neutru al legii "$\circ$".

5p b) Să se arate că funcția $f:G\to(0,\infty), f(x)=\dfrac{2+x}{2-x}$ este izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ și $((0,\infty),\cdot)$.

5p c) Să se arate că funcția $f:G\to\mathbf{R}, F(x)=\int_0^x \dfrac{1}{4-t^2}dt$ este un izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ și $(\mathbf{R},+)$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^{2x}(x^2-4x+4)$.

5p a) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}$.

5p b) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f''(x)-f'(x)}{f(x)}$.

5p c) Să se determine valorile lui $m\in\mathbf{R}$, astfel încât: $f'(x)\geq m\cdot e^{2x}, (\forall)\, x\in\mathbf{R}$.

2. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\arccos(\cos x)$ și $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p a) Arătați că 2π este o perioadă a funcției f.

5p b) Calculați: $f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\ldots+f(2017\pi)$.

5p c) Calculați: $F(2\pi)$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 43

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Dacă $x+\frac{1}{x}=4$, $x\neq 0$, calculați: $x^2+\frac{1}{x^2}$.

5p **2.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_2^2(2x)+3\log_2(4x)=13$.

5p **3.** Pentru orice $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 1$, suma primilor n termeni ai unui șir este dată de formula: $S_n=2n^2+n$. Este acest șir o progresie aritmetică?

5p **4.** În reperul xOy considerăm punctele $A(4,2)$, $B(-2,1)$ și $C(3,-2)$. Să se determine coordonatele punctului D, astfel încât: $5\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.

5p **5.** Determinați termenul care-l conține pe x^4 în dezvoltarea $\left(x\sqrt[4]{x}-\frac{1}{x}\right)^8$.

5p **6.** Determinați raza cercului înscris în triunghiul ABC, dacă $AB=AC=6$ și $BC=8$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+z=4 \\ 2x+y+az=5 \end{cases}$, $a\in\mathbf{R}$.

5p a) Să se rezolve sistemul pentru $a=1$.

5p b) Să se determine a, astfel încât sistemul să aibă soluție unică.

5p c) Să se determine a, astfel încât sistemul să fie incompatibil.

2. Pe $\mathbf{R}$ definim legea: $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p a) Să se verifice că: $x\circ y=(x+2)(y+2)-2, (\forall)\, x,y\in\mathbf{R}$.

5p b) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $(\log_2 x)\circ(\log_3 x)=-2$.

5p c) Dați un exemplu de $a,b\in\mathbf{Q}-\mathbf{Z}$ cu $a\circ b\in\mathbf{N}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

5p a) Studiați asimptotele la graficul funcției f.

5p b) Calculați: $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-\frac{1}{e}-1}{x-e}$.

5p c) Studiați concavitatea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

5p a) Calculați: $\int_2^e (x-1)f(x)dx$.

5p b) Calculați: $\int_e^{e^2} (x-1)f(x)\ln x\,dx$.

5p c) Calculați F primitiva funcției f cu proprietatea $F(e)=1$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 44

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se determine n știind că: $3C_n^1 + 2C_n^2 = 8, n \geq 2, n \in \mathbf{N}$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2x,\ g(x) = -x - 2$.

5p **3.** Să se determine $x \in \mathbf{R}, x > 0$, știind că $x, 6, x-5$ sunt în progresie geometrică.

5p **4.** Se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(1,n)$, $C(2,5)$ și $D(m,4)$, unde $m, n \in \mathbf{R}$. Să se determine valorile lui m și n, astfel încât $ABCD$ paralelogram.

5p **5.** Dacă $M = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{2012}\}$, determinați probabilitatea ca alegând un element din mulțimea M acesta să fie rațional.

5p **6.** Fie $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, astfel încât $\cos 2a = \frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos a$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=a \end{cases}$, unde a este un parametru real.

5p a) Calculați $\det(A)$ unde A este matricea asociată sistemului.

5p b) Arătați că rangul matricei A nu poate fi 2.

5p c) Rezolvați sistemul pentru $a \neq 1$.

2. Se consideră pe $\mathbf{R}$ legea $x * y = xy - 4x - 4y + 20$ și mulțimea $G = (4, \infty)$.

5p a) Arătați că $(G, *)$ este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu legea "$*$".

5p b) Demonstrați că funcția $f : (0,\infty) \to G, f(x) = x + 4$ este izomorfism de la $((0,\infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

5p c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de 2016 ori}} = 5$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f : (0;\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

5p a) Arătați că f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

5p b) Calculați: $\lim\limits_{x \to \infty} xf(x)$.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{n \to \infty} (f(1) + f(2) + \ldots + f(n)), n \in \mathbf{N}^*$.

2. Pentru fiecare număr $n \in \mathbf{N}^*$ definim $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx$.

5p a) Calculați I_1.

5p b) Arătați că: $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 45

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați: $C_{10}^3 + A_{10}^4 + C_{10}^7$.

5p **2.** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=3x-4$. Determinați valorile reale ale numărului m, știind că punctul $A(m, m+2)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\log_2(x^2-10)=3$.

5p **4.** Se dau vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=-\vec{i}-\vec{j}$. Calculați: $3\vec{u}-2\vec{v}$.

5p **5.** Determinați partea reală a numărului complex $(1+2i)(3-4i)$.

5p **6.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctele $A(0,-2)$ și $B(-2,0)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ 2x-y+mz=3, \ m\in\mathbf{R}. \\ 4x+y+5z=3 \end{cases}$

5p a) Calculați $\det(A)$ pentru $m=1$, unde A este matricea asociată sistemului.

5p b) Determinați $m\in\mathbf{R}$ dacă determinantul matricei A este nul.

5p c) Pentru $m=2$, rezolvați sistemul.

2. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-3x-3y+12$.

5p a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție.

5p b) Calculați: $C_3^1 * C_4^1$.

5p c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $x*(x-1)=10$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$.

5p a) Calculați $f'(x)$ pentru $x\in\mathbf{R}$.

5p b) Determinați asimptotele funcției f.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

2. Pentru $n\in\mathbf{N}$ se consideră $I_n=\int_2^3 \dfrac{x^n}{x^2-1}dx$.

5p a) Arătați că: $I_0=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

5p b) Calculați I_1.

5p c) Demonstrați că: $I_{n+2}-I_n=\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}, (\forall)\, n\in\mathbf{N}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 46

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $n=\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}-\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ este natural.

5p **2.** Determinați $m\in\mathbf{R}^*$, astfel încât vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=mx^2+2(m+1)x+m+1$ să fie situat sub axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\log_2 3+\log_4(1-x)=1$.

5p **4.** Determinați valorile naturale ale lui n pentru care $A_n^3\le 6C_n^2$.

5p **5.** Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC cu vârfurile $A(1,2)$, $B(3,1)$ și $C(4,3)$.

5p **6.** Determinați ecuația: $2\cos x+\sqrt{3}=0$ care verifică $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbf{R}$.

5p a) Să se calculeze $A^2(2)$.

5p b) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $A(x+1)=\det(A(x)+I_3)\cdot I_3$.

5p c) Să se calculeze: $A(2)+A^2(2)+\ldots+A^{2018}(2)$.

2. Pe $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=6xy-5(x+y)+5$.

5p a) Determinați elementul neutru al legii "$\circ$".

5p b) Să se determine simetricul elementului 2 în raport cu legea de compoziție.

5p c) Să se determine $x\in\mathbf{R}$ pentru care $x\circ x=x$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\ln(x^2+1)$.

5p a) Să se studieze monotonia funcției.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A(1,\ln 2)$.

5p c) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^{2x}+x^2+1$.

5p a) Aflați primitiva funcției f al cărei grafic conține punctul $A(0,1)$.

5p b) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.

5p c) Calculați aria suprafeței cuprinse între axa Ox, graficul funcției $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=e^x\cdot f(x)$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 47

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z = \frac{3i}{1-2i}$.

5p **2.** Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 1 + 2x$. Calculați: $f(1) - f(2) + f(3) - \ldots - f(2018)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $2^{x+1} + 4^x = 3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $A = \{100, 101, 102, \ldots, 999\}$ acesta să fie divizibil cu 10.

5p **5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{j}$ și $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$. Determinați vectorul $\overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul segmentului $[BC]$.

5p **6.** Dacă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$, calculați $\sin x + \cos x$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră în planul xOy punctele $A(m+1, 2)$, $B(m, m)$ și $C(2m+1, 5)$, $m \in \mathbf{R}$.

5p a) Pentru $m = 1$ să se scrie ecuația dreptei AB.

5p b) Să se demonstreze că punctele A, B, C nu pot fi coliniare, pentru orice $m \in \mathbf{R}$.

5p c) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie egală cu 9.

2. Fie polinomul $f = X^3 - aX^2 + 3X - 1 \in \mathbf{R}[X]$.

5p a) Determinați $a \in \mathbf{R}$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X + 1$.

5p b) Pentru $a = -5$ determinați rădăcinile polinomului f.

5p c) Să se determine $a \in \mathbf{R}$, astfel încât $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{3\} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x+3}{x-3}$.

5p a) Calculați: $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x))^x$.

5p b) Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

5p c) Să se arate că $f(x) < 1$ pentru orice $x \in (-\infty, 3)$.

2. Se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \to \mathbf{R}, f_n(x) = x^n \ln x$, $n \in \mathbf{N}^*$.

5p a) Calculați: $\int\limits_e^{e^2} \frac{\ln x}{f_1(x)} dx$.

5p b) Calculați: $\int\limits_1^e f_1(x) dx$.

5p c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $g: [1, e] \to \mathbf{R}, g(x) = \frac{1}{x} f_1(x)$ în jurul axei Ox.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 48

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele reale x pentru care $x-2$, $2x+2$, $x+1$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care ecuația axei de simetrie a graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x^2-mx+1$ este $x=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\ln(6-3^x)=x\ln 9$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului: $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{30}$.

5p **5.** Fie vectorii $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{4j}$ și $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{3j}$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați: $\sin x$ și $\sin 2x$ dacă $\sin\frac{x}{2}=\frac{-3}{5}$, $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & x\end{pmatrix}, x\in\mathbf{R}$.

5p a) Determinați $x\in\mathbf{R}$ astfel încât $A(x)$ să fie neinversabilă.

5p b) Determinați $A^{-1}(-1)$.

5p c) Rezolvați în $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ ecuația: $A(-1)X=2A(0)$.

2. Pe $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=3^{x+y+1}$.

5p a) Să se calculeze: $\log_3 2\circ\log_3 4$.

5p b) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $x^2\circ 2x=81$.

5p c) Să se arate că dacă $(x\circ y)\circ(-3)=81$, atunci $x+y=\log_3 2$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^{-x}$.

5p a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$.

5p b) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $f(-x)\geq x+1$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{x^n}{x^2+1}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

5p a) Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f_n(x)dx+\int_0^1 f_{n-2}(x)dx=\dfrac{1}{n-1}$, pentru orice $n\geq 3$.

5p c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 49

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $3+i=a+bi$.

5p **2.** Determinați $x \in \mathbf{N}$ astfel încât: $2+4+6+\ldots+x=1980$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{x^2+1}=1-x$.

5p **4.** Aflați numărul de elemente al mulțimii $A=\{x \in \mathbf{Z} \mid |2x-1| \leq 6\}$.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,2)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $x+2y-1=0$.

5p **6.** Calculați $\sin x$ și $\cos x$ dacă $2\sin x+\cos x=1$, $x \in (0,\pi)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y+z=2 \\ x+3my+z=6 \\ x+y+mz=2 \end{cases}$, unde $m \in \mathbf{R}$.

5p a) Calculați determinantul matricei sistemului.

5p b) Determinați $m \in \mathbf{R}$, astfel încât sistemul să aibă soluție unică.

5p c) Rezolvați sistemul pentru $m=1$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f=X^3+mX^2+X+m$.

5p a) Să se calculeze $f(-1)$.

5p b) Pentru $m=1$, determinați rădăcinile complexe ale polinomului f.

5p c) Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcțiile $f:(2,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln(x-2)$ și $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=x^2-5x+6$.

5p a) Calculați $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5p .b) Să se studieze monotonia funcției $h:[3,\infty)\to\mathbf{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5p c) Să se arate că $g(x)\geq f(x)$ pentru orice $x \in [3,\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=\ln^n x$, $n \in \mathbf{N}^*$.

5p a) Calculați: $\int_1^e f_2(x)dx$.

5p b) Arătați că $n\int_1^x f_{n-1}(t)dt+\int_1^x f_n(t)dt=x\ln^n x$ pentru orice $n>2$ și orice $x \in (0,\infty)$.

5p c) Determinați numărul natural n pentru care $\int_1^e \dfrac{f_n(x)}{x}dx=\dfrac{1}{2018}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 50

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n al mulțimii $A=\{2,3,4,5\}$ acesta să verifice inegalitatea $n^2+n>n!$.

5p **2.** Să se determine numărul real x, știind că numerele $x+1$, $2x-2$ și $x-3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ inecuația: $x^2-7x+12\leq 0$.

5p **4.** Se consideră triunghiul ABC în care $AB=6$, $AC=5$ și $m(\sphericalangle A)=60°$. Să se calculeze aria triunghiului.

5p **5.** Să se determine numărul real m pentru care vectorii $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{w}=\vec{i}-m\vec{j}$ sunt ortogonali.

5p **6.** Să se calculeze $\frac{\sin 115°}{\cos 25°}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

5p a) Să se verifice că $AB=BA$.

5p b) Să se calculeze A^2+B^2, unde $A^2=A\cdot A$ și $B^2=B\cdot B$.

5p c) Să se arate că $C^4=5^4\cdot I_2$, unde $C=A+B$ și $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.

2. Se consideră polinomul $f=mX^3+11X^2+7X+m$ care are coeficienți reali.

5p a) Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât f să fie divizibil cu polinomul $g=X-1$.

5p b) Pentru $m=-9$ descompuneți polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.

5p c) Pentru $m=-9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x-2, & x\leq 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

5p c) Să se determine $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(e^x)+f(e^{x^2})+\ldots+f(e^{x^{2017}})}{x^{2017}}$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x+x^2+2x$ și $F(x)=e^x+\frac{x^3}{3}+x^2+1$.

5p a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p c) Să se determine aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbf{R}$, $h(x)=\frac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 51

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se compare numerele 2^2 și $\log_2 16$.

5p **2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3^{2x-5} = 3^{x^2-8}$.

5p **3.** Determinați numărul real m pentru care vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = -\vec{i} + m\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **4.** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(4,0)$, $B(0,2)$ și $D(2,a)$ să fie coliniare.

5p **5.** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = x^2 - 8x + 15$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot \ldots \cdot f(6)$.

5p **6.** Calculați probabilitatea ca alegând un element n al mulțimii $A = \{1,2,3,4,5\}$ acesta să verifice inegalitatea $n^2 \le 2^n$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Se notează $A^n = \underbrace{A\cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei A.

5p b) Să se arate că $A^2 + A^3 = O_2$.

5p c) Să se calculeze suma $A + 2\cdot A^2 + \ldots + 10\cdot A^{10}$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 2X^2 + 3X + m$, unde m este număr real.

5p a) Calculați $f(1)$.

5p b) Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$.

5p c) Determinați numărul real m, știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = (2x+5)(1-e^{-x})$.

5p a) Să se studieze semnul funcției f.

5p b) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.

5p c) Fie $g:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}, g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ și limitele laterale ale lui g în $x = 0$.

2. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+2}dx$, $n \in \mathbf{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_1.

5p b) Să se arate că $I_{n+2} + I_{n+1} + 2I_n = \dfrac{1}{n+1}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

5p c) Să se arate că șirul $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 52

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $x^2-5x+6=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x+1$. Să se calculeze: $f(2)+f(2^2)+f(2^3)$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbf{Z}$ ecuația: $2^{2x^2+3x-2}=8$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un element n al mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2-n\le n!$

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$ și $B(-2,a), a\in\mathbf{R}$. Să se determine numărul real a astfel încât dreapta AB să treacă prin punctul $O(0,0)$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x=\frac{3}{5}$ și $x\in(0°,90°)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ precum și submulțimea $G=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbf{C})\mid AX=XA\}$.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei A.

5p b) Să se verifice că $I_2\in G$ și că $A\in G$.

5p c) Să se arate că: $XA^2=A^2X, (\forall)X\in\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

2. Fie polinomul $f=(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)+1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

5p a) Calculați $f(0)$ și $f(i)$, unde $i^2=-1$.

5p b) Calculați polinomul $f-(X^2-5X+5)^2$.

5p c) Determinați numărul rădăcinilor raționale ale polinomului.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+e^x$.

5p a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p b) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

5p c) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}, I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx$.

5p a) Să se calculeze I_0.

5p b) Să se arate că: $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}, (\forall)n\in\mathbf{N}, n\ge 2$.

5p c) Să se arate că șirul $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 53

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Dacă numerele a și b au suma egală cu 4 și produsul egal cu 3, să se calculeze a^2+b^2.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale numărului m pentru care $x=5$ este soluție a ecuației: $m^2(x-1)=x-3m+2$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $\lg^2 x-4\lg x+3=0$.

5p **4.** Pentru $A(4,0)$, $B(0,2)$ și $C(1,-1)$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

5p **5.** Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $BC=4$ și că măsura unghiului A este de $30°$.

5p **6.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=6$ și $a_2=5$. Calculați a_7.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,2^n)$, $n\in\mathbf{N}$.

5p a) Să se verifice dacă punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

5p b) Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1 și A_2.

5p c) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, $n\in\mathbf{N}$.

2. Se consideră mulțimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbf{Z}\}$, unde $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbf{Z}$.

5p a) Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in\mathbf{Z}$.

5p b) Să se determine elementul neutru din grupul $(G,\cdot)$.

5p c) Arătați că $f:\mathbf{Z}\to G, f(x)=A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbf{Z},+)$ și $(G,\cdot)$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-x, x\geq 1\\ -x^2+x, x<1\end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

5p b) Să se calculeze $f'(0)+f'(2)$.

5p c) Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

2. Se consideră integralele $I_n=\int_2^3 \frac{x^n}{x^2+1}dx$, $n\in\mathbf{N}$.

5p a) Să se calculeze I_0.

5p b) Să se determine I_1.

5p c) Să se demonstreze că $I_{n+2}+I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, pentru $(\forall)n\in\mathbf{N}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 54

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați: $2+6+18+\ldots+486$.

5p **2.** Rezolvați în $\mathbf{Z}$ ecuația: $-x^2+6x-5=0$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{Z}$ inecuația: $\log_4(2x-1)\leq\log_2 x$.

5p **4.** Calculați: $C_6^2+A_5^3$.

5p **5.** Scrieți ecuația dreptei paralelă cu dreapta de ecuație $2x-3y+4=0$, care trece prin punctul $A(1,-3)$.

5p **6.** Calculați: $\sin 75°$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$ unde m este un parametru real.

5p a) Să se determine $m\in\mathbf{R}$, astfel încât soluția sistemului să fie $(2,1,-1)$.

5p b) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = m^2-3m$, unde $m\in\mathbf{R}$.

5p c) Pentru $m=-5$ să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-9X^2-X+9$ care are rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}$.

5p a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-1.

5p b) Să se verifice că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=9(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-18$.

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x)=0$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.

5p a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$, pentru $(\forall)x>0$.

5p b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x_0=1$.

5p c) Să se arate că $2\sqrt{x}\geq 2+\ln x$, pentru $(\forall)x>0$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definite prin $f(x)=x^2+x\ln x$ și $g(x)=2x+\ln x+1$.

5p a) Să se arate că $f'(x)=g(x), (\forall)x>0$.

5p b) Să se calculeze: $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx$.

5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 55

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației: $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$.

5p **2.** În reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ fie vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u}+3\vec{v}$.

5p **3.** Să se calculeze $\cos 79^0+\cos 101^0$.

5p **4.** Se consideră ecuația $x^2+mx+2=0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5$.

5p **5.** Să se demonstreze că $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$ este un număr natural.

5p **6.** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din mulțimea $A=\{11,12,13,\ldots,20\}$ acesta să fie număr prim.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$ unde a este număr real.

5p a) Să se calculeze determinantul pentru $a=-1$.

5p b) Să se demonstreze că $D(a)=-(a-1)^2(a+2)$, pentru orice număr real a.

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a)=-4$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2^{x+y}$.

5p a) Să se calculeze $2018\circ(-2018)$.

5p b) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $x\circ x^2=64$.

5p c) Să se demonstreze că nu există $x,y,z\in\mathbf{R}$ pentru care $(x\circ y)\circ z=2^z$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=x\ln x$.

5p a) Să se calculeze derivata funcției f pe $(0,\infty)$.

5p b) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}$.

5p c) Să se arate că $f(x)\geq-\dfrac{1}{e}$, oricare ar fi $x>0$.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=xe^x$ și $F(x)=(x-1)e^x$.

5p a) Să se verifice că F este o primitivă a funcției f.

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

5p c) Să se calculeze: $\int_0^1\dfrac{f(x)-F(x)}{e^x+1}dx$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 56

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze $\log_6 3 + \log_6 10 - \log_6 5$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.

5p **3.** În triunghiul MNP se cunosc $MN = 3$, $MP = 5$ și $m(\sphericalangle M) = 60°$. Să se calculeze lungimea laturii NP.

5p **4.** Să se rezolve inecuația $2C_n^2 \leq n + 8$, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

5p **5.** Se consideră dreptele de ecuații $x + 2y - 4 = 0$ și $x - 3y - 4 = 0$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.

5p **6.** Să se calculeze: $\log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cu $x, y \in \mathbf{R}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $\det(A) = 0$.

5p b) Pentru $a = 3$ să se verifice că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

5p c) Pentru $a = 3$ să se rezolve ecuația matriceală $A \cdot X = B$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+1)X^2 - 3X + 3, f \in \mathbf{R}[X]$.

5p a) Determinați $m \in \mathbf{R}$ astfel încât suma rădăcinilor polinomului f să fie egală cu 1.

5p b) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = \sqrt{3}$.

5p c) Pentru $m = 0$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

5p a) Să se verifice dacă $f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru oricare $x > 1$.

5p b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 2$.

5p c) Să se arate că $f(x) \geq e^2$, pentru $(\forall) x > 1$.

2. Se consideră funcțiile $f, F: (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ și $F(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

5p a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p b) Să se calculeze $\int F(x)dx$.

5p c) Să se calculeze: $\int_1^e xf(x)dx$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 57

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea întreagă a numărului $10\sqrt{2}$.

5p **2.** Determinați imaginea funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=-2x^2+4x+5$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $2^{1-x^2}\cdot 2^{2x}=4^{-3}$.

5p **4.** Calculați: $A_4^2+C_4^2$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$, $B(3,-12)$ și $C(2,m)$. Determinați $m\in\mathbf{R}$ pentru care A,B,C sunt coliniare.

5p **6.** Calculați: $\sin^2 10^0+\cos^2 170^0$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3-8x+2=0$.

5p a) Să se calculeze: $x_1+x_2+x_3$.

5p b) Să se arate că: $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$.

5p c) Să se calculeze valoarea determinantului d.

2. Pe mulțimea $\mathbf{Z}$ se consideră legile de compoziție "$*$" și "$\circ$" definite prin $x*y=x+y+2,\ x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p a) Să se demonstreze că: $x\circ y=(x+2)(y+2)-2, (\forall)x,y\in\mathbf{Z}$.

5p b) Determinați elementele neutre ale fiecăreia dintre cele două legi de compoziție.

5p c) Să se rezolve în $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ sistemul: $\begin{cases} x^2*y^2=7 \\ x^2\circ y^2=16 \end{cases}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=(x-2)\ln x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,+\infty)$.

5p b) Să se determine: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p c) Să se arate că f' este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Fie șirul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n}x\,dx,\ n\in\mathbf{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_1.

5p b) Să se studieze monotonia șirului.

5p c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 58

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Să se arate că numărul $(1+i\sqrt{3})^2+(1+i\sqrt{3})^2$ este număr întreg.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ sistemul de ecuații: $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$, ecuația: $x-6\sqrt{x-2}+6=0$.

5p **4.** Determinați termenul care nu conține pe x, din dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$, unde $x\in\mathbf{R}^*$.

5p **5.** Calculați distanța de la punctul $A(3,0)$, la dreapta $3x-4y+1=0$.

5p **6.** În triunghiul ABC, $AB=4$, $BC=5$ și $CA=6$. Arătați că: $m(\sphericalangle B)=2m(\sphericalangle C)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $A\cdot B$.

5p b) Să se rezolve ecuația matriceală $A\cdot X=B$.

5p c) Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-4A+5I_2=O_2$.

2. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție:

$$x*y=-xy+2x+2y-2,(\forall)x,y\in\mathbf{R}.$$

5p a) Determinați elementul neutru al legii "$*$".

5p b) Determinați simetricul elementului 2018 în raport cu legea "$*$".

5p c) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $x*x=1$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f admite două puncte de extrem.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcțiile $f_m:[0,1]\to\mathbf{R}$ definite prin $f_m(x)=m^2x^2+(m^2-m+1)x+1$ unde $m\in\mathbf{R}$.

5p a) Să se calculeze: $\int f_1(x)dx$.

5p b) Să se calculeze: $\int_0^1 e^x f_0(x)dx$.

5p c) Să se determine $m\in\mathbf{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x)dx=\frac{3}{2}$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 59

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+2x+3$. Calculați: $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)$.

5p **2.** Calculați suma primilor 20 termeni ai unei progresii aritmetice pentru care $a_1+a_2+a_3=15$ și $a_3+a_4+a_5=27$.

5p **3.** Aflați x din egalitatea $\log_3 x=2-\log_3 16$.

5p **4.** Determinați numărul de termeni raționali ai dezvoltării $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$.

5p **5.** Găsiți asimptota spre $+\infty$ a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$.

5p **6.** Determinați numărul de puncte de extrem local pentru funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Calculați A^2.

5p b) Determinați $a\in\mathbf{R}$ pentru care matricea $A+I_3$ este inversabilă.

5p c) Dacă $f:\mathcal{M}_3(\mathbf{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ prin $f(X)=X^2-4X+4I_3$, determinați a, astfel încât

$$f(A)=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ -3 & 3 & -3\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție:

$$x\circ y=2xy-8x-8y+36.$$

5p a) Să se demonstreze că $x\circ y=2(x-4)(y-4)+4$.

5p b) Să se rezolve ecuația $x\circ x=196$.

5p c) Determinați dacă elementul $x=4$ admite simetrie.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f admite două puncte de extrem.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **2.** a) Să se determine primitivele funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^{3x}$.

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[1,e]\to\mathbf{R}, g(x)=\sqrt{\frac{\ln x}{x}}$.

5p c) Să se calculeze $\int_1^3 \frac{1}{x(x+2)}dx$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 60

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați modulul numărul complex $z = \frac{24-7i}{8+15i}$.

5p **2.** Aflați $m \in \mathbf{R}$ pentru care graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-mx+9$ este situat deasupra axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\lg^2 x = 56 + \lg x$.

5p **4.** Determinați câte numere impare divizibile cu 3 aparțin mulțimii:
$M = \{100, 101, \ldots, 999\}$.

5p **5.** Dacă $A(-2,0)$, $B(1,5)$, $C(3,-1)$, determinați ecuația medianei corespunzătoare laturii $[BC]$ a triunghiului ABC.

5p **6.** Dacă $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $\sin x = \frac{-7}{25}$, calculați $\operatorname{tg} a$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}), a \in \mathbf{R}$.

5p a) Calculați: $\det A$.

5p b) Determinați inversa matricei A.

5p c) Calculați: A^n, $n \in \mathbf{N}$.

2. Fie $f = X^{2017} + X^{2016} + X^{2015} + X + 1 \in \mathbf{R}[X]$.

5p a) Calculați $f(1)\cdot f(-1)$.

5p b) Aflați restul împărțirii lui f la $X^3 - X$.

5p c) Demonstrați că f nu are rădăcini întregi.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^3+2x+2017$.

5p a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{(x+1)^4 - x^4}$.

5p b) Demonstrați că f este inversabilă.

5p c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p a) Arătați că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbf{R}, F(x)=2\sqrt{x}(\ln x - 2)$ este o primitivă a funcției f.

5p b) Arătați că orice primitivă G a funcției f este monotonă pe intervalul $[1,\infty)$.

5p c) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = \frac{1}{e}$ și $x = e$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 61

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $(1+i\sqrt{3})^2$.

5p **2.** Aflați valorile lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $ax^2-(a+1)x+a+1 \geq 0, (\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $16^{\lg x} = 11 \cdot 4^{\lg x} - 10$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 7.

5p **5.** Aflați ecuația înălțimii lui A a triunghiului ABC, unde $A(-3,2)$, $B(0,-5)$, $C(3,4)$.

5p **6.** Demonstrați că: $\sin 70^\circ = \sin 50^\circ + \sin 10^\circ$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.

5p b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.

5p c) Determinați matricea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, știind că $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Fie polinomul $f = X^4 - 4X^3 + 8X^2 + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$.

5p a) Arătați că $x_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ și calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p b) Arătați că f nu are toate rădăcinile reale.

5p c) Demonstrați că f nu are nicio rădăcină întreagă.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \ln(1+x^2) - x$.

5p a) Studiați monotonia funcției f pe $\mathbf{R}$.

5p b) Demonstrați că f este surjectivă.

5p c) Arătați că graficul lui f nu admite asimptote.

2. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$.

5p a) Arătați că funcția $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}, x \in \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției f.

5p b) Calculați aria suprafeței delimitate de dreptele $x=0$, $x=1$, Ox și graficul funcției $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = (2x+1)f(x)$.

5p c) Calculați: $\lim\limits_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 62

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați partea imaginară a numărului complex $z=(1+3i)^2$.

5p **2.** Aflați $m \in \mathbf{R}$ pentru care funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(m^2-3m)x+3$ este strict crescătoare.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $6\cdot 9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conțină cifra 1.

5p **5.** Calculați distanța dintre dreptele paralele $d_1: x+y+5=0$, $d_2: 2x+2y+1=0$.

5p **6.** Calculați $\sin\frac{19\pi}{12}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & 4x+1 & 0 \\ 0 & 3x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr natural.

5p a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p b) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y.

5p c) Determinați numerele reale x, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Fie polinomul $f=X^3+7X^2-2X-2$ și $x_1,x_2,x_3\in\mathbf{C}$ rădăcinile lui f.

5p a) Calculați $f(2)\cdot f(-2)$.

5p b) Aflați restul împărțirii lui f la $g=X^2-X$.

5p c) Calculați: $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p a) Calculați $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{x+2}$.

5p b) Scrieți ecuația tangentei la Gf în punctul de abscisă $x=0$.

5p c) Aflați domeniul de derivabilitate al funcției f.

2. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\int_2^x \frac{t^2}{t^2-1}dt$ și $g:(1,\infty)\to\mathbf{R}, g(x)=\int_0^{\ln\frac{x^2-1}{3}}\sqrt{3e^t+1}\,dt$.

5p a) Calculați $f(3)$.

5p b) Calculați $g'(x), x\in(1,\infty)$.

5p c) Demonstrați că $g(x)=2f(x)$, $(\forall)\,x\in(1,\infty)$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 63

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați partea întreagă a numărului $(\sqrt{2}+3)^2$.

5p **2.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\frac{2x+1}{x-1} \geq \frac{x+3}{x+2}$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\lg^2 x + \lg x - 12 = 0$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3\}$.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei duse prin $A(0,1)$, paralelă cu dreapta de ecuație $d: x-y+5=0$.

5p **6.** Aflați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi având lungimile laturilor egale cu 7, 8 și 9.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ și $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbf{C} \right\} \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.

5p a) Calculați A^3.

5p b) Arătați că dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ și $AX = XA$, atunci $X \in M$.

5p c) Arătați că ecuația $X^2 = A$ nu are soluții în $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.

2. Fie polinomul $f = X^3 + 5X^2 - X - 3$ și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$ rădăcinile sale.

5p a) Calculați $f(1) \cdot f(-1)$.

5p b) Calculați $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$.

5p c) Demonstrați că f este ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 5x + \ln(x^2 + x + 1)$.

5p a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

5p b) Demonstrați că f este injectivă.

5p c) Arătați că graficul funcției f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$.

5p a) Calculați: $\int_2^3 \frac{f(x)}{x-1} dx$.

5p b) Calculați: $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{f(x)} dx$.

5p c) Determinați punctele de extrem local ale funcției $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 64

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Aflați partea reală a numărului complex $z=(2-i)(1-2i)$.

5p **2.** Aflați valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care $x^2+(m+1)x+m^2+m>0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

5p **3.** Rezolvați ecuația $3-3\cos x-2\sin^2 x=0$ în $[0,\pi]$.

5p **4.** Determinați probabilitatea de a obține un multiplu de 55 atunci când alegem la întâmplare un număr de trei cifre.

5p **5.** Aflați ecuația dreptei care trece prin $A(-1,0)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $3x-2y+5=0$.

5p **6.** Demonstrați relația: $\sin 50^\circ+\cos 50^\circ=\sqrt{2}\cos 5^\circ$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie A matricea coeficienților sistemului $\begin{cases}(m+1)x+y+z=1\\ x+(m+1)y+z=m\\ x+y+(m+1)z=m^2\end{cases}$, $m \in \mathbf{R}$.

5p a) Calculați $\det A$.

5p b) Rezolvați sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p c) Rezolvați sistemul în cazul $m=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+mX-6$, unde m este număr real.

5p a) Calculați $f(0)$.

5p b) Arătați că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}=1$, știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p c) Determinați numărul real m, știind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p a) Aflați asimptotele graficului funcției f.

5p b) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.

5p c) Determinați numărul soluțiilor ecuației $f(x)=m$, $m \in \mathbf{R}$.

2. Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbf{R}, f(x)=\sqrt{\ln x}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(e^x)dx$.

5p b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(e^{x^2})dx$.

5p c) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox.

Pregătirea Examenului de Bacalaureat Național

TESTUL 65

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Rezolvați ecuația: $2+5+8+\ldots+x=155$.

5p **2.** Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2+3x-17=0$. Calculați valoarea sumei $x_1^3+x_2^3$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt[3]{1-x}+2=2x$.

5p **4.** Aflați probabilitatea ca alegând la întâmplare o submulțime nevidă a mulțimii $M=\{0,1,2,\ldots,10\}$, aceasta să aibă toate elementele impare.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei duse prin $A(1,2)$, paralelă cu dreapta BC, unde $B(2,0)$ și $C(5,3)$.

5p **6.** Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC, știind că $AB=2$, $BC=\sqrt{6}$ și $CA=\sqrt{3}+1$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie A matricea coeficienților sistemului $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{cases}$, $m\in\mathbf{R}$.

5p a) Calculați $\det A$.

5p b) Determinați valorile lui m pentru care sistemul are soluție unică și rezolvați-l în acest caz.

5p c) Rezolvați sistemul în cazul $m=-2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-4X+2a$, unde a este număr real.

5p a) Calculați $f(0)$.

5p b) Determinați numărul real a, știind că $1+i$ este rădăcină a polinomului f.

5p c) Pentru $a=3$, arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-31$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:\mathbf{R}-\{1\}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

5p a) Determinați asimptotele graficului funcției f.

5p b) Aflați punctele critice ale lui f.

5p c) Determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=m$, $m\in\mathbf{R}$.

2. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^{-x^2}$ și F o primitivă a sa.

5p a) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p b) Calculați aria subgraficului funcției $g:[0,1]\to\mathbf{R}, g(x)=x\cdot f(x)$.

5p c) Arătați că funcția $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, h(x)=F(x)+3f(x)$ are exact un punct de extrem local.

VARIANTE OFICIALE BACALAUREAT 2015/2017

Examenul de bacalaureat național 2015

2015 (matematică-informatică)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_2 = 5$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(3,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = a - x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^{4-x} = 2^{2x+2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,1)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul M și are panta egală cu 2.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5$, $AC = 12$ și $BC = 13$. Arătați că $\sin C = \frac{5}{13}$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr natural.

5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.

5p b) Arătați că $A(x)A(y) = A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Determinați numerele reale x, știind că $A(x)A(x)A(x) = A(7)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X + m$, unde m este număr real.

5p a) Arătați că $f(0) = m$.

5p b) Pentru $m = 1$, arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p c) Determinați numărul natural prim m, știind că polinomul f este o rădăcină întreagă.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbf{R}$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Arătați că derivata funcției f este descrescătoare pe $\mathbf{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}, f(x) = \ln x$.

5p a) Arătați că $\int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$.

5p b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

5p c) Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^e \frac{1}{x}(f(x))^n dx = \frac{1}{2015}$.

Examenul de bacalaureat național 2015

2015 (matematică-informatică)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_2 = 2015$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,4]\to\mathbf{R}, f(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-8x)=\log_3 9$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3)$, $B(6,3)$ și $C(4,0)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB=1$, $B=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&a+1\\0&1&a+2\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p b) Determinați numerele reale a, știind că $A^2(a)-2A(a)+I_3=O_3$, unde $A^2(a)=A(a)A(a)$.

5p c) Arătați că $A(2)+A(4)+A(6)+\ldots+A(100)=50A(51)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+2$, unde m este număr real.

5p a) Arătați că $f(0)=2$.

5p b) Determinați numărul real m pentru care $x_1=x_2+x_3$, unde x_1,x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p c) Pentru $m=8$, arătați că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^x(x^2-6x+9)$.

5p a) Arătați că $f'(x)=e^x(x^2-4x+3)$, $x\in\mathbf{R}$.

5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p c) Demonstrați că $e^x(x-3)^2\leq 4e$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 (1-x^3)^n dx$.

5p a) Arătați că $I_1=\frac{3}{4}$.

5p b) Arătați că $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p c) Demonstrați că $I_{n+1}=\frac{3(n+1)}{3n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2016

IUNIE 2016 (matematică-informatică)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că: $(\sqrt{2}-3)^2+(\sqrt{2}+3)^2=22$.

5p **2.** Calculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-6x+6)=\log_3 1$.

5p **4.** Aflați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$ și $B(1,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2+x\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p b) Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, pentru orice numerele reale x și y.

5p c) Determinați numărul real a, $a\neq -1$, știind că

$$A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right).$$

2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+2$, unde m este număr real.

5p a) Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.

5p b) Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

5p c) Pentru $m=3$, descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbf{R}$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^x(x-1)$.

5p a) Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=0$.

5p b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu e.

5p c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-n}^{1}(f(x)+e^x)dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2016

SESIUNE SPECIALĂ 2016 (matematică-informatică)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_2 = 4$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1, a)$ aparține graficului funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x-2} = 3^{2-x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0, 3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și are panta egală cu 1.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = 10$, $AC = 10$ și $BC = 12$. Arătați că $\sin B = \frac{4}{5}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} -mx + y + z = -1 \\ x - my + z = -1 \\ x + y - mz = m \end{cases}$,

unde m este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 2$.

5p b) Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m, $m \neq -1$ și $m \neq 2$.

5p c) Pentru $m = 2$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2t_0 + 3z_0 = 9$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x * y = -2xy + 10x + 10y - 45.$$

5p a) Arătați că $x * y = -2(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere reale x și y.

5p b) Arătați că $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 5$.

5p c) Determinați numerele naturale m și n, pentru care $m * n = 27$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 8\ln x$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f: (4, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x-4)}$.

5p a) Arătați că $\int_5^{10} (x-4) f(x)\,dx = \ln 2$.

5p b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [5, 6] \to \mathbf{R}$, $g(x) = xf(x)$.

5p c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 \int_n^{n+1} f(x)\,dx \right) = 1$.

Examenul de bacalaureat național 2016

AUGUST 2016 (matematică-informatică)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2016$ și $r = 2$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = x + m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4x-6} = 4^{3x-4}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1,2,3,\ldots,40\}$, acesta să conțină cifra 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(4,5)$. Determinați ecuația dreptei AB.

5p **6.** Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{4}{5}$, arătați că $2x = \frac{24}{25}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y - z = -1, \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ unde a este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -2$.

5p b) Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$.

5p c) Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2.$$

5p a) Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p b) Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = 3x + 3$. Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Determinați numerele reale a, pentru care $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de 2016 ori}} = 3^{2016} - 1$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbf{R}, f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}, x \in (1,+\infty)$.

5p b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.

5p c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2) + f'(3) + f'(4) + \ldots + f'(n)\right) = -\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}, f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 \sqrt{x} f(x)dx = \frac{5}{2}$.

5p b) Arătați că $\int_1^{e^2} \left(f(x) - \sqrt{x}\right)\ln x dx = 4$.

5p c) Determinați numărul real a, $a > 1$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,a]\to\mathbf{R}, g(x) = f(x)$ este egal cu $\pi\left(\ln a + \frac{7}{2}\right)$.

Examenul de bacalaureat național 2017

IUNIE 2017 (matematică-informatică)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 2 + i$. Arătați că $z + \bar{z} + z\bar{z} = 9$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1, m)$ aparține graficului funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(1 - \log_2 x)(2 - \log_2 x) = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 1)$, $B(3, 3)$ și $C(0, 2)$. Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $(1 + \operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x - (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\sin^2 x = 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0, \\ -2x - y + 3z = 0 \end{cases}$ unde a este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(9)) = 0$.

5p b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p c) Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0, y_0, z_2), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0 + y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 + z_0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$.

5p a) Arătați că $x \circ y = (x + 7)(y + 7) - 7$, pentru orice numere reale x și y.

5p b) Determinați numerele reale x, știind că $x \circ x = x$.

5p c) Determinați numărul real a, știind că $2017^a \circ (-6) = 1$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{1 - x}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1 - x + x\ln x}{x(1 - x)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $x \ln x > x - 1$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 3x^2)\,dx = e - 1$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{7}{4}$.

5p c) Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = n$ are aria egală cu $n^2 - n + 1$.

Examenul de bacalaureat național 2017

SESIUNE SPECIALĂ 2017 (matematică-informatică)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați suma numerelor întregi din intervalul $(-5, 5)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=x-3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$ și $N(4,2)$. Determinați coordonatele punctului P, situat pe axa Ox, astfel încât $PM=PN$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $AB=6\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{4}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 4^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p b) Demonstrați că $\det(A(x))=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot 2^x)$, pentru orice număr real x.

5p c) Arătați că $A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & 2(2^{2017}-1) & \frac{4}{3}(4^{2017}-1)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x*y=7xy+7x+7y+6.$$

5p a) Arătați că $x*y=7(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p b) Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p c) Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=48$, atunci numerele a, b și c sunt egale.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$, $x\in\mathbf{R}$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $-2e\le f(x)\le\frac{6}{e^x}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2\frac{x+1}{\sqrt{x}}f5xdx=\ln\frac{3}{2}$.

5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p c) Determinați numărul real m, $m>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}, g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu $1-\ln\frac{m+1}{m}$.

Examenul de bacalaureat național 2015

2015 (științele-naturii)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al doilea termen al progresie aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și rația $r = 2$.

5p **2.** Determinați numărul real m știind că punctul $A(m, 0)$ aparține graficului funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 4) = \log_2 8$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătați că $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p a) Arătați că $A(2014) + A(2016) = 2A(2015)$.

5p b) Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)) = 0$.

5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(2) + xA(3)) = 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -xy - x - y - 2$.

5p a) Arătați că $(-1) * 1 = -1$.

5p b) Arătați că $x * y = -(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2) * (2x-3) = 5$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.

5p a) Arătați că $f'(x) = 4x(x-2)(x+2), x \in \mathbf{R}$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x) - x^4}{x^2 + 1}$.

5p c) Determinați coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x+2}{x}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 xf(x)dx = \frac{7}{2}$.

5p b) Demonstrați că funcția $F: (0, +\infty) \to \mathbf{R}, F(x) = x + 2\ln x + 2015$ este o primitivă a funcției f.

5p c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției
$g: (0, +\infty) \to \mathbf{R}, g(x) = (f(x) - 1)\ln x$,
axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat național 2015

2015 (științele-naturii)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + i$ și $z_2 = 3 - i$. Arătați că numărul $z_1 z_2$ este real.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1, 1)$ aparține graficului funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 + 2x - 4} = x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 80\}$, acesta să fie divizibil cu 7.

5p **5.** În reperul carteazian xOy, se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ și $B(2, a)$. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 4$.

5p b) Determinați numărul real a, știind că $A(1) + A(3) = aA(2)$.

5p c) Arătați că $A(x)A(y) = 2A(x + y) + xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x * y = 3xy + 6x + 6y + 10.$$

5p a) Arătați că $2 * (-2) = -2$.

5p b) Arătați că $x * y = 3(x + 2)(y + 2) - 2$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = (x + 1)e^x$.

5p a) Arătați că $f'(x) = (x + 2)e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $[-3, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1)f(x)dx = 0$.

5p b) Arătați că $\int_{0}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2} + \ln 2$.

5p c) Determinați numărul real m, $m > 0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = f(x) - x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = m$, are aria egală cu $\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2016

IULIE 2016 (științele-naturii)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 1 - i$. Arătați că $z^2 = -2i$.

5p **2.** Calculați $(g \circ f)50$, unde $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 2016$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x - 2016$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-3x} = 3^{x-4}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0, 1)$. Determinați ecuația dreptei d, care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 3x - 2016$.

5p **6.** Determinați aria triunghiului ABC, știind că $AB = 6$, $AC = 4$ și $A = \frac{\pi}{6}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 4$.

5p b) Demonstrați că $A(1+m) + A(1-m) = 2A(1)$, pentru orice număr real m.

5p c) Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -3xy + 9x + 9y - 24$.

5p a) Arătați că $x * y = -3(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice numere reale x și y.

5p b) Demonstrați că legea de compoziție "$*$" este asociativă.

5p c) Determinați numărul real x, pentru care $(x * x) * x = 12$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 3\ln x$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(x^3-1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei la graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 (x^2 + 3x + 3) f(x)dx = 6$.

5p b) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 3$ are aria egală cu $\ln 7$.

5p c) Demonstrați că $\int_{-1}^{0} f'(x) f(x)dx = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2016

SESIUNE SPECIALĂ 2016 (științele-naturii)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(\sqrt{5}+2)^2-4\sqrt{5}=9$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(m,4)$ aparține graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2+9)=\log_4 25$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizibil cu 2.

5p **5.** Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}-6\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{1}{2}$, arătați că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 2x\\ -6x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p b) Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Determinați numărul real x, știind că $A(2^x)A(2^x)=A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+2$, unde a este număr real.

5p a) Arătați că $f(-1)+f(1)=2$, pentru orice număr real a.

5p b) Determinați numărul real a, pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.

5p c) Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3=-5$, pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $f(\pi)>13$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(3x+1)e^x$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{e^x}f(x)dx=\frac{5}{2}$.

5p b) Determinați numărul real m, pentru care funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, F(x)=(3x+m)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p c) Determinați numărul real nenul a, știind că $\int_0^a f(x)dx=3a$.

Examenul de bacalaureat național 2016

AUGUST 2016 (științele-naturii)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 4$ și rația $q = 2$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 2x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x+1) = \log_3 5$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(1,0)$ aparține dreptei de ecuație $y = mx - 2$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB = \sqrt{2}$ și $C = \frac{\pi}{4}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(2)) = -1$.

5p b) Demonstrați că $A(a) + A(-a) = 2A(0)$, pentru orice număr real a.

5p c) Determinați numărul real x, știind că $A(x)\,A(x) = 2A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + mX + 4$, unde m este număr real.

5p a) Arătați că $f(-1) + f(1) = 0$, pentru orice număr real m.

5p b) Pentru $m = -1$, arătați că polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$.

5p c) Determinați numărul real m, știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1,+\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1,+\infty)$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $f(e) < \frac{7}{2}$.

2. Se consideră funcția $f: (0,+\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 x^2 f(x)\,dx = e(e-1)$.

5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p c) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$ are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

Examenul de bacalaureat național 2017

IUNIE 2017 (științele-naturii)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 4$ și $a_2 = 7$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 4x + 1 = 0$. Arătați că $4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} = \frac{1}{8}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 15.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 1)$, $B(1, 1)$ și $C(3, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră triunghiului ABC cu $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$ și $C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați $\sin B$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.

5p b) Demonstrați că $A(x)A(y) = xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p c) Determinați numărul real a, știind că $A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2}) = A(27)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X - 4$, unde m este număr real.

5p a) Pentru $m = 1$, arătați că $f(1) = 0$.

5p b) Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X + 2$, atunci restul împărțirii lui f la $X + 3$ este egal cu -1.

5p c) Determinați numărul real m, știind că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x + 2017}{e^x}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x + 2016)}{e^x}$, $x \in \mathbf{R}$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $[-2015, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{4}{3}$.

5p b) Determinați primitiva F a funcției f, știind că $F(1) = \frac{\pi}{4} + 1$.

5p c) Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^n xf(x)dx = \frac{1}{2}\ln 5$.

Examenul de bacalaureat național 2017

SESIUNE SPECIALĂ 2017 (științele-naturii)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ și $z_2 = 3 - 2i$. Arătați că numărul $z_1 + z_2$ este real.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(2, m)$ aparține graficului funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x-5} = 3^{-2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, acesta să fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 5)$, $B(1, 3)$ și $C(m, 1)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul C aparține dreptei AB.

5p **6.** Se consideră $F(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, *unde* x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.

5p b) Determinați numărul real x, pentru care $A(x) + A(x+2) = 2A(2)$.

5p c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n, n+1)$, $N(2, n)$ și $P(3, 0)$. Determinați numărul natural n, știind că punctele M, N și P sunt coliniare.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + X - 1$, unde a este număr real.

5p a) Arătați că $f(1) - f(-1) = 4$, pentru orice număr real a.

5p b) Pentru $a = 2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.

5p c) Determinați numărul real a, pentru care $x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{e^x + 1} = 0$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = e^x + 2x$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 2x)dx = e - 1$.

5p b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0, 1] \to \mathbf{R}, g(x) = f(x) - e^x$.

5p c) Determinați numărul real a, știind că $\int_0^a xf(x)dx = 1 + \frac{2a^3}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2015

2015 (tehnologic)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că media geometrică a numerelor $a = 16$ și $b = 9$ este egală cu 12.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care $f(2) = 0$, unde $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1} = 3^5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie multiplu de 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 3)$ și $B(5, 3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\sin x = \frac{1}{2}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $C(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det A = -5$.

5p b) Arătați că $\det(A + C(-1)) = \det B$.

5p c) Determinați numărul real x pentru care $C(x) \cdot A - A \cdot C(x) = B$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 6X + 3$.

5p a) Arătați că $f(1) = 0$.

5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 3X - 3$.

5p c) Demonstrați că $x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 3x + 1$.

5p a) Arătați că $f'(x) = 3(x-1)(x+1), x \in \mathbf{R}$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - x^3}{x}$.

5p c) Arătați că $-1 \leq f(x) \leq 3$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

5p a) Arătați că $\int_2^3 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = 5$.

5p b) Demonstrați că funcția $F: (0, +\infty) \to \mathbf{R}, F(x) = x^2 + \ln x + 2015$ este o primitivă a funcției f.

5p c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $f: [1, 2] \to \mathbf{R}, g(x) = f(x) - 2x$.

Examenul de bacalaureat național 2015

2015 (tehnologic)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=2$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 15.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ și $B(4,6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $x=\frac{12}{13}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{5}{13}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $\det A=-2$.

5p b) Arătați că $A+B=5C$.

5p c) Demonstrați că $AB+BA+4I_2=25C$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

5p a) Arătați că $5\circ(-4)=-4$.

5p b) Arătați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x^3+3x^2+5$.

5p a) Arătați că $f'(x)=6x(x+1)$, $x\in\mathbf{R}$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.

5p c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 (f(x)-3x^2)dx=15$.

5p b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2015$.

5p c) Determinați numărul natural n, $n>1$, știind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x^2}dx=9$.

Examenul de bacalaureat național 2016

MAI 2016 (tehnologic)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $1-\frac{1}{4}:0,25=0$.

5p **2.** Calculați $f(-1)\cdot f(1)$, unde $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-3}=5$.

5p **4.** Un obiect costă 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(5,4)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, dreptunghic în A, știind că $AC=6$ și $B=\frac{\pi}{4}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & -1\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p a) Arătați că $\det A=-4$.

5p b) Arătați că $\det(A-2B)=0$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Determinați numerele reale x și y, pentru care $A\cdot B=B\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p a) Arătați că $1\circ(-2)=-2$.

5p b) Demonstrați că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x\circ\frac{1}{x}=x$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^3+x^2-x+1$.

5p a) Arătați că $f'(x)=3x^2+2x-1$, $x\in\mathbf{R}$.

5p b) Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=3$.

5p c) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta $y=4x+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^5+x^3+2x$.

5p a) Arătați că $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(f(x)-x^3-2x)dx=0$.

5p b) Arătați că $\int_{0}^{1}e^x(f(x)-x^5-x^3+1)dx=3e^2+1$.

5p c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbf{R}$.

Examenul de bacalaureat național 2016

IULIE 2016 (tehnologic)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{10}{3}=1$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}=5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$ și $B(7,5)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{5}{13}$, arătați că $\operatorname{tg}x=\frac{12}{5}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $\det A=1$.

5p b) Arătați că $B\cdot B+A=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

5p c) Determinați numerele reale x și y, pentru care $A+B=\begin{pmatrix}2^x&0\\0&4^y\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+1$.

5p a) Arătați că $f(1)=-2$.

5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X+1$.

5p c) Demonstrați că $(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2)=-3$, unde x_1,x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=-x^3+3x+2$.

5p a) Arătați că $f'(x)=3(1-x)(1+x)$, $x\in\mathbf{R}$.

5p b) Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-9$.

5p c) Demonstrați că $f(x)\le 4$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+2$.

5p a) Arătați că $\int_{-1}^{1}(f(x)-2)dx=0$.

5p b) Arătați că $\int_{0}^{1}e^x f(x)dx=2e-1$.

5p c) Determinați numărul real a, știind că $\int_{0}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{6-a}(f(x)-4)dx$.

Examenul de bacalaureat național 2016

AUGUST 2016 (tehnologic)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $1-\frac{1}{2}:0,5=0$.

5p **2.** Arătați că $2(x_1+x_2)-x_1x_2=1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-8x+15=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x+1}=6$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, acesta să fie divizibil cu 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ și $B(0,8)$. Calculați lungimea segmentului AB.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, dreptunghic în A, știind că $BC=3\sqrt{2}$ și $m(\hat{B})=45°$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $\det A=1$.

5p b) Arătați că $A\cdot A+I_2=2A$.

5p c) Determinați numerele reale a, b și c, pentru care $A\cdot\begin{pmatrix}a-2&b\\c+1&1\end{pmatrix}=I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+3x+3y+6$.

5p a) Arătați că $1\circ(-3)=-3$.

5p b) Demonstrați că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $x\circ x\le x$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x^3-3x^2+7$.

5p a) Arătați că $f'(x)=6x(x-1)$, $x\in\mathbf{R}$.

5p b) Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-11}{x-2}=12$.

5p c) Demonstrați că $f(x)\ge 6$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+3x$.

5p a) Arătați că $\int_{-1}^{1}(f(x)-3x)dx=\frac{2}{3}$.

5p b) Arătați că $\int_{0}^{1}(f(x)-x^2)e^x dx=3$.

5p c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbf{R}, g(x)=\dfrac{3f(x)}{x}$.

Examenul de bacalaureat național 2017

IUNIE 2017 (tehnologic)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(2-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+1$. Calculați $f(-1)\cdot f(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+2}=9$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{11,22,33,44,55,66,77,88,99\}$, acesta să fie multiplu de 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,-1)$. Arătați că $AO=OB$.

5p **6.** Arătați că $\sin^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=\frac{1}{4}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det A=-8$.

5p b) Arătați că $A\cdot A-2A=8I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p c) Demonstrați că $\det(A\cdot B-B\cdot A)\geq 0$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3+3X^2-X-2$.

5p a) Arătați că $f(1)=2$.

5p b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X+1$.

5p c) Determinați rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^4-2x^2+12$.

5p a) Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1), x\in\mathbf{R}$.

5p b) Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{f(x)-x^4}=-\frac{1}{2}$.

5p c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=3x^2+2x-4$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 (f(x)-2x+4)dx=7$.

5p b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2017$.

5p c) Determinați numărul real a pentru care $\int_1^a f(x)dx=a^3-2$.

Examenul de bacalaureat național 2017

IULIE 2017 (tehnologic)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(2+\frac{1}{3}\right):\frac{7}{6}=2$.

5p **2.** Arătați că $(x_1+x_2)^2-6x_1x_2=1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-5x+4=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-5}=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 25%, prețul unui televizor este 600 de lei. Determinați prețul televizorului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $M(8,6)$. Calculați distanța dintre punctele O și M.

5p **6.** Arătați că $\sin^2 135^\circ+\sin^2 45^\circ=1$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $\det A=2$.

5p b) Arătați că $(A+B)(B-A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}$.

5p c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, știind că $A\cdot X=B$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-3$.

5p a) Arătați că $1*2=0$.

5p b) Determinați numerele reale x pentru care $(x^2)*x=-1$.

5p c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n*n*n*n<3$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^3+2x^2+x$.

5p a) Arătați că $f'(x)=(x+1)(3x+1)$, $x\in\mathbf{R}$.

5p b) Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)}=\frac{1}{3}$.

5p c) Demonstrați că $f(x)\geq-\frac{4}{27}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+x+1$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (f(x)-x^2-1)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p b) Demonstrați că funcția $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+2017$ este o primitivă a funcției f.

5p c) Determinați numărul natural n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$ are aria egală cu $n^2-\frac{7}{3}$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Clasa a IX-a

Cap. I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Test de evaluare 1. Pag. 8 **1.** b) $[x+y]=2$; c) $[x]+[y]=1$; d) $\{x+y\}=0,1(8)$. **2.** $x\in\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$ **3.** a) $2x-3=4$ sau $2x-3=-4$ cu soluțiile $x=\frac{7}{2}$, respectiv $x=-\frac{1}{2}$. **4.** a) $a=0$, $b=0$; b) $a=\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{2}$. ***Test de evaluare 2. Pag. 8*** **1.** b) $a=9+4\sqrt{5}>6\sqrt{5}$. **2.** a) $[2x-5]=3\Leftrightarrow 3\le 2x-5<4\Leftrightarrow x\in\left[4,\frac{9}{2}\right)$; b) $x=2$; c) $x=1$. **4.** b) $S=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2017^2}-\frac{1}{2018^2}=1-\frac{1}{2018^2}$.

Cap. II. ȘIRURI DE NUMERE REALE. PROGRESII

Test de evaluare 1. Pag. 10 **1.** $r=A_2-A_1=5$, $a_{20}=a_1+19r=60$, $S_{20}=\frac{(a_1+a_{20})20}{2}=630$. **2.** $x=3$. **3.** $q=3$. **4.** $x=\frac{1}{10}$. **5.** $x=\frac{15}{256}$. ***Test de evaluare 2. Pag. 10*** **1.** $a_{2018}=4033$. **2.** $q=3$, $b_1=\frac{2}{3}$. **3.** $x=5$. **4.** $\frac{b_{n+1}}{b_n}=2^r$ = constant cu r rația progresiei aritmetice.

Cap. III. FUNCȚII

Test de evaluare 1. Pag. 13 **1.** $x=-958$. **2.** $f(-1)=g(-1)\Rightarrow a=b$. **3.** $-\frac{m}{2}=2\Rightarrow m=-4$. **5.** a) $D=\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$; b) f impar. ***Test de evaluare 2. Pag. 13*** **1.** b) $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=5$; c) $x=1$. **2.** $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$. **3.** $a<8$. **4.** a) $f(\sqrt{2})>f(\sqrt{3})>f(\sqrt{6})$; b) $a=0$, $a=-\frac{9}{5}$. **5.** a) $\Delta>0\Rightarrow$ $\Rightarrow m>-1$; b) $\Delta=0\Rightarrow m=-1$.

Cap. IV. VECTORI

Test de evaluare 1. Pag. 14 **3.** a) $a=-4$; b) 2. **4.** $C(4,4)$. **5.** $\sqrt{26}$.

Cap. V. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

Test de evaluare 1. Pag. 17 **1.** $\sin\frac{\pi}{6}$. **2.** $\sin a=\frac{5}{13}$, $\sin 2a=\frac{120}{169}$. **3.** a) 0; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\cos^2 89=\sin^2 1$, $\cos^2 88=\sin^2 2,\ldots,\cos^2 46=\sin^2 44$. Suma devine $1+44+\cos^2 45=45+\frac{1}{2}=\frac{91}{2}$. **5.** $\operatorname{tg} a=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 2a=\frac{4}{3}$. ***Test de evaluare 2. Pag. 17*** **1.** $\sin 2<\cos 2$. **2.** $\cos a=-\frac{12}{13}$. **3.** a) 0; b) 0.

TESTE FINALE

Testul 1. Subiectul I. Pag. 20 **1.** a) $f\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$; b) Pentru $x\geq 1 f(x)=0\Leftrightarrow x=$ $=\frac{1}{2}$, nu convine. Pentru $x<1, f(x)=0\Leftrightarrow x=-1$, soluție. c) Pentru $x\geq 0, g(x)=x\Leftrightarrow 1=0$, fals. Pentru $x<0$, $g(x)=x\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$, soluție. **2.** a) $\Delta=0$. b) $V(x_v,y_v)$ se află pe dreapta de ecuație $y=x+2$, dacă $y_v=x_v+2$, etc. C) $f(x)\geq 0,(\forall)x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\Delta<0$ și coeficientul lui x^2 pozitiv (condiție verificată).

Testul 1. Subiectul II. Pag. **1.** a) $\Delta=0\Leftrightarrow m>\frac{11}{20}$. b) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-$ $-6m+5\Rightarrow m\in\{0,6\}$. c) $x_1,x_2\in\mathbf{R}_+\Leftrightarrow\Delta\geq 0, b\geq 0, p\geq 0$. **2.** a) $\Delta>0$.

Testul 1. Subiectul III. Pag. **1.** a) $a_2=-1, a_3=-5, b_1=-2, b_2-4$; b) $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}-3}{a_n-3}=$ $=\frac{2a_n-6}{a_n-3}=2$, de unde șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică cu rație $q=2$; c) $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=-2^n$ și $a_n=-2^n+3,(\forall)n\geq 1$.

Testul 3. Subiectul I. Pag. **1.** $[2+\sqrt{3}]+\left[\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right]=3+[2-\sqrt{3}]=3$. **2.** $x\in\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$. **3.** $x\in\{-4,6\}$. **4.** $x\in[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$. **5.** Inducție matematică. **6.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=$ $=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FE}$. Deci $\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right|=\left|\overrightarrow{FE}\right|=2$.

Testul 3. Subiectul II. Pag. **1.** a) $x_1=1, x_2=4$. b) Inducție matematică; c) Inducție matematică.

Testul 4. Subiectul I. Pag. **2.** 3 elemente $x\in\{-1,0,1\}$. **4.** Inducție matematică. **5.** $x=-5$. **6.** $q=2, b_1=10$. Deci $S_{10}=10(2^{10}-1)$.

Testul 4. Subiectul II. Pag. **1.** a) $x_{\min}=-\frac{b}{2a}=1, y_{\min}=f(1)=-\frac{\Delta}{4a}=m-1$; b) $m-1\geq 2\Rightarrow$ $\Rightarrow m\geq 3$; c) $f(x)=(x-1)^2, (f\circ f)(x)=f((x-1)^2)=(x-1)^4-2(x-1)^2+1=((x-1)^2-1)^2$. Ecuația devine $(x-1)^2=1$ cu soluție: $x\in\{0,2\}$. **2.** b) $f(x)=-x^2-1, y_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}=-1$; c) $f(x)=-2x^2-x, (f(x))<1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1<-2x^2-x<1\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+x-1<0\\2x^2+x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

Clasa a X-a

Cap. I. NUMERE REALE: PUTERI, RADICALI, LOGARITMI

Test de evaluare 1. Pag. 25 **1.** $\sqrt[5]{32}=2, \frac{1}{2^{-1}}=2, \sqrt[5]{32}-\frac{1}{2^{-1}}=0$. **2.** $(x-1)^3=10$ și $x-1=$ $=\sqrt[3]{10}, x=\sqrt[3]{10}+1$. **3.** $\log_{\sqrt{5}}25=\frac{\log_5 25}{\log_2\sqrt{5}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$. **4.** $A=\log_{x-1}(x^2-9), x^2-9>0\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup$ $\cup(3,+\infty), x-1>0, x-1\neq 1\Rightarrow x\in(1,+\infty)\setminus\{2\}. x\in(3,+\infty)$. **5.** $\lg\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1000}{999}\right)=\lg 1000=3\in\mathbf{Z}$. **6.** $9^{\log_3 2}=3^{2\log_3 2}=3^{\log_3 4}=4, \sqrt[3]{2}^{\log_2 27}=2^{\frac{1}{3}\log_2 27}=2^{\log_2 3}=3, 4+3=7$. **7.** $\log_5 20<\log_5 25=2, \log_6 40>$ $>\log_6 36=2, \log_5 20<\log_6 40$. **8.** $5^a=\sqrt{5^3}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{5^2}}=5^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{3}}, 5^a=5^{\frac{7}{6}}\Rightarrow a=\frac{7}{6}$. **9.** Inegalitatea mediilor $\frac{\frac{\lg a}{\lg b}+\frac{\lg b}{\lg c}+\frac{\lg c}{\lg a}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{\lg a}{\lg b}\cdot\frac{\lg b}{\lg c}\cdot\frac{\lg c}{\lg a}}\Rightarrow\frac{\log_b a+\log_c b+\log_a c}{3}\geq 3\cdot\sqrt[3]{1}$.

Test de evaluare 2. Pag. 25 **1.** $(x+1)^{2008}=1\Rightarrow x+1=\pm 1, x\in\{0,-2\}$. **2.** $\log_5 150+\log_5 2-$ $-\log_5 12=\log_5\frac{300}{12}=\log_5 25=2$. **3.** $A=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[5]{8}}=\frac{\log_2\sqrt[5]{2}}{\log_2\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}}, A=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{5}{9}\in\mathbf{Q}$. **4.** $mg=\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}=$ $=\sqrt[3]{18\cdot 28\cdot 147}=mg=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3\cdot 7^3}=42$. **5.** $x+5\neq 0\Rightarrow x\neq -5, \frac{x^2+x-6}{x+5}\geq 0$, semnul funcției, $x\in(-5,-3]\cup[2,+\infty)$. **6.** $\log_2(\sqrt[3]{5}-1)+\log_2(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)=\log_2((\sqrt[3]{5})^3-1)=\log_2 4=2$. **7.** $15<200<$

$< 225 \Rightarrow \log_{15}15 < \log_{15}200 < \log_{15}225$, $1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1$. **8.** $\log_2 5 = a$, $\lg 40 = \frac{\log_2 40}{\log_2 10} = \frac{\log_2 8 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 5}$, $\lg 40 = \frac{3+a}{1+a}$. **9.** $3^a = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{10}} \cdot 3^{-\frac{1}{10}}$, $3^a = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$.

Cap. II. NUMERE COMPLEXE

Test de evaluare 1. Pag. 27 **1.** $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{3i\sqrt{3}}{8} - \frac{9}{8} - \frac{3i\sqrt{3}}{8}$, $z = -1 \in \mathbf{R}$. **2.** $A = i^{205}(1 + i + i^2 + i^3)$, $A = i^{205}(1 + i - 1 - i) = 0$. **3.** $x = -5 + i(2x + 8)$, $x \in \mathbf{R} \Rightarrow 2x + 8 = 0$ și $x = -y$. **4.** Notând $x^2 = y$ ecuația devine $y^2 + 3y + 2 = 0$, cu soluțiile $y_1 = -1$ și $y_2 = -2$. $x^2 = -1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm i$, $x^2 = -2 \Rightarrow x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$. **5.** $z = \frac{3 + i + 3i + 1}{9 + 1} = \frac{4 + 4i}{10} = \frac{2}{5} + \frac{2i}{5}$, $\mathrm{Re}(z) = \frac{2}{5}$. **6.** $|z| = \frac{|4 - 3i|}{|3 + 4i|}$, $|z| = \frac{5}{5} = 1$. **7.** $z_2 = 2 - 3i$, $S = 4$, $P = 13$. Ecuația de forma $a(z^2 - 4z + 13) = 0$. **8.** $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$, $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 1 - 2i$, $z_4 = -1 - 2i$. **9.** $|(7 + 24i) \cdot z + 5i| \leq$ $\leq |(7 + 24i) \cdot z| + |5i| = |(7 + 24i) \cdot z + 5i| \leq 25 \cdot \frac{1}{5} + 5 = 10$.

Test de evaluare 2. Pag. 27 **1.** $z = [(1 + i)^2]^2 = (2i)^2$, $z = -4 \in \mathbf{R}$. **2.** $|z| = \left|\frac{1}{3} + \frac{2i\sqrt{2}}{3}\right|^2$, $|z| =$ $= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{8}{9}}^{10} = 1$. **3.** $z + \bar{z} = 6 \Leftrightarrow a + bi + a - bi = 6$, $2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$. **4.** $\bar{z} = \overline{(i-2)^{100} + (2+i)^{100}} = \overline{i=2}^{100} +$ $+ \overline{2+i}^{100} = (-i-2)^{100} + (2-i)^{100} = (2+i)^{100} + (i-2)^{100}$, $\bar{z} = z \Rightarrow z \in \mathbf{R}$. **5.** $(x+y) + i(3x+3y) = 11 - xy + 15i$, $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ 3(x+y) = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(2,3);(3,2)\}$. **6.** $x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$ $x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$. **7.** a) $f(z) \cdot f(\bar{z}) = 1 \Leftrightarrow \bar{z} \cdot z = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$, $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -i$; b) f este injectivă: Fie $z_1 = a_1 + b_2 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbf{C}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$, $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow a_1 - b_1 i = a_2 - b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$. f este surjectivă: Fie $z^1 = c + di \in \mathbf{C}$, $(\forall) c, d \in$ $\in \mathbf{R}$, $f(z) = z^1 \Leftrightarrow \overline{a + bi} = c + di \Rightarrow a = c$, $b = -d$. Dacă $z = c - di$ și $f(z) = z^1$. f este injectivă și surjectivă $\Rightarrow f$ este bijectivă; c) $z \in \mathbf{C}$. Cum $(f \circ f) = (z) = f(\bar{z}) = z$, $(\forall) z \in \mathbf{C}$, deci $f \circ f = 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow f^{-1} = f$.

Cap. III. PROBLEME DE NUMĂRARE BINOMUL LUI NEWTON. PROBABILITĂȚI

Test de evaluare 1. Pag. 29 **1.** $n = A_3^1 + A_3^3$, $n = 3 + 6 = 9$. **2.** $B = \{1, 6, 11, \ldots, 86\}$, $card(B) = 18$. **3.** $\overline{ab} \vdots 5 \Rightarrow b \in \{0, 5\}$, a este pătrat perfect și $a \in \{1, 4, 9\}$ sunt $2 \cdot 3 = 6$ numere. **4.** Număr de cazuri posibile $3^3 = 27$. Număr de cazuri favorabile $3! = 6$. $P = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$. **5.** $\frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} \geq \frac{(x-1)!}{(x-3)!} \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{2} \geq$ $\geq (x-1)(x-2) - x^2 + 5x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1; 4]$. Soluție: $x \in \{3, 4\}$. **6.** $f(a) = 0$, f injectivă $\Rightarrow f(b) \neq 0, f(c) \neq 0$. Numărul funcțiilor injective $g : \{b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ este $A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$. **7.** $C_{10}^0 \cdot 2^{10} - C_{10}^1 \cdot 2^9 + \ldots + C_{10}^{10} =$ $= (2-1)^{10} = 1^{10} = 1$. **8.** Dezvoltarea are 7 termeni, deci termenul din mijloc este $T_4 = C_6^3(\sqrt[3]{5})^3 \cdot 1^3$, $T_4 =$ $= 20 \cdot 5 = 100 \in \mathbf{N}$. **9.** $T_{k+1} = C_{10}^k (x^2)^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = C_{10}^k x^{\frac{40-5k}{2}}$, $\frac{40 - 5k}{2} = 0 \Rightarrow k = 8$, $T_9 = C_{10}^8 = 45$.

Test de evaluare 2. Pag. 29 **1.** $C_{205}^5 + C_{205}^6 - C_{206}^{200} =$ **2.** $A_n^2 = 42$, $n(n-1) = 42$. Soluție: $n = 7$. **3.** Număr cazuri posibile: 12, număr cazuri favorabile: $\{9, 21, 33, 45\}$, număr cazuri favorabile: 4. $P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. **4.** $C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5 - C_5^0 - C_5^1 = 26$. **5.** Numărul funcțiilor este $4^{card(A)}$, $4^{card(A)} = 64 \Rightarrow card(A) = 3$. **6.** $C_{27}^{3n} = C_{27}^3 = C_{27}^{24}$, $3n = 3 \Rightarrow n = 1$, $3n = 24 \Rightarrow n = 8$. **7.** $x =$ prețul Inițial. $x - \frac{10}{100}x + \frac{10}{100}\left(x - \frac{10}{100}x\right) = 990$, $\frac{99x}{100} = 990 \Rightarrow x = 1000$ lei. **8.** $T_3 = C_{10}^2 (3^x)^8 \cdot (9^{x-6})^2$, $T_3 = 45 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 45 \cdot 3^{8x} \cdot 3^{4x-24} = 45$, $3^{12x-24} = 1 \Rightarrow x = 2$. **9.** $T_{k+1} = C_{100}^k (\sqrt[3]{2})^{100-k} \cdot (\sqrt{5})^k$, $k = \overline{0, 100}$. $T_{k+1} \in \mathbf{R} \Rightarrow$ $\Rightarrow (100 - k) \vdots 5$ și $k \vdots 2 \Rightarrow k \vdots 10$. $k \in \{0, 10, \ldots, 100\}$, deci sunt 11 termeni raționali. Numărul termenilor raționali: $101 - 11 = 90$.

Cap. IV. FUNCȚII. ECUAȚII

Test de evaluare 1. Pag. 31 **1.** $Gfn\circ x,\ 3^{x+1}-9=0\Rightarrow x=1\Rightarrow Gfn\circ x=\{A(1,0)\};\ Gfn\circ y,$ $f(0)=-6\Rightarrow Gfn\circ y=\{B(0,-6)\}.$ **2.** $x_1x_2\in(2,+\infty),\ x_1<x_2\Rightarrow x_1-2=x_2-2,\ \log_{\frac{1}{5}}(x_1-2)>\log_{\frac{1}{5}}(x_2-2)$ rezultă $f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare. **3.** $5^{\frac{x+1}{3}}=5^2.\ \frac{x+1}{3}=2\Rightarrow x=5.$ **4.** Condiție de existență: $x-2\geq 0\Leftrightarrow x\in(2,+\infty),\ \sqrt{x-2}+\sqrt{(x-2)^2}=12,\ \sqrt{x-2}=t\geq 0\Rightarrow t^2+t-12=0.t_1=-4$ nu convine. $t_2=3\Rightarrow\sqrt{x-2}=3\Rightarrow x=11\in[2,+\infty).$ **5.** Condiție de existență: $x>0\Leftrightarrow x\in(0,+\infty).\ \log_5 x+\frac{\log_5 x}{2}=6\Rightarrow$ $\Rightarrow 3\log_5 x=12.\ \log_5 x=4\Rightarrow x=625\in(0,+\infty).$ **6.** $x-\frac{\pi}{6}\in\left\{\pm\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}.\ x-\frac{\pi}{6}\in$ $\in\left\{\pm\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}.\ x\in\{(2k+1)\pi\mid k\in\mathbf{Z}\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}.$ **7.** $\sin x(\sin x-1)=0.\ \sin x=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x\in\{0,\pi\}.\ \sin x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}.$ **8.** $1\leq x\leq 5\Rightarrow 0\leq x-1\leq 4.\ 0\leq x-1\leq 2\Leftrightarrow f(x)\in[0,2],(\forall)x\in[1,5]\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathrm{Im}f=[0,2].$ **9.** Fie $x_1,x_2\in\mathbf{R},f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1-3=2x_2-3\Rightarrow x_1=x_2.$ Fie $y\in\mathbf{R},f(x)=y\Rightarrow 2x-3=$ $=y^3\Rightarrow x=\frac{y^3+3}{2}\in\mathbf{R}.$ f injectivă și surjectivă, rezultă f bijectivă. $f^{-1}:\mathbf{R}\to\mathbf{R},f^{-1}(x)=\frac{x^3+3}{2}.$

Test de evaluare 2. Pag. 31 **1.** $Gfn\circ x,f(x)=0\Rightarrow\log_3(x+9)=0\Rightarrow x=-8\in(-9,+\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow Gfn\circ y,f(0)=\log_3 9=2\Rightarrow Gfn\circ y=\{B(0,2)\}.$ **2.** $\cos x\neq 0,(\forall)x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{3}\Rightarrow \mathrm{tg}^2x=\frac{\sqrt{3}}{3}.$ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{tg}\,x>0\Rightarrow \mathrm{tg}\,x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}.$ **3.** $7^{x+1}\cdot 3^x=142\Leftrightarrow 21^x\cdot 7=142.\ 21^x=21\Rightarrow x=1.$ **4.** $(\sqrt{5}+2)^x=\frac{1}{(\sqrt{5}-2)^x}=t>0.\ t+\frac{1}{t}=18\Rightarrow t^2-18t+1=0\Rightarrow t_{1,2}=9\pm 4\sqrt{5}.\ (\sqrt{5}+2)^x=9+4\sqrt{5}\Rightarrow$ $\Rightarrow x=2,(\sqrt{5}+2)^x=9-4\sqrt{5}\Rightarrow x=-2.$ **5.** Condiție de existență: $x+22>0,\ \log_2(x+22)>0\Rightarrow x\in$ $\in(-21,+\infty).\ \log_2(x+22)=5.\ x+22=32\Rightarrow x=10\in(-21,+\infty).$ **6.** Condiție de existență: $2x+3>0,$ $2x-3>0,x^4>0\Rightarrow x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right).\ \log_9 x^4=\log_3 x^2.\ 4x^2-9=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}.$ Deoarece $x=\sqrt{3}\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right).$ **7.** Condiție de existență: $2x-1\geq 0,x\geq 0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right).\ \sqrt[3]{x+7}-2=0\Rightarrow x+7=8\Rightarrow x=1$ care verifică relația $\sqrt{2x-1}-x=0\Rightarrow\sqrt{2x-1}=x\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right).$ **8.** $7x^2+18x+8=x^3+6x^2+$ $+12x+8,\ x^3-x^2-6x=0\Rightarrow x(x^2-x-6)=0\Rightarrow x_1=0$ sau $x^2-x-6=0\Rightarrow x_2=3,x_3=-2.$ **9.** a) $x_1,x_2\in$ $\in(0,1),x_1<x_2\Rightarrow\arcsin x_1<\arcsin x_2$ (funcția arcsin este strict crescătoare). $\arcsin x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$ Funcția cos este strict descrescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos(\arcsin x_1)>\cos(\arcsin x_2)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare; b) $\arcsin x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin x=t\Rightarrow f(x)\geq\cos t>0.\ \sin t=\sin(\arcsin x)=x\Rightarrow\cos t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)=\sqrt{1-x^2}.\ (f\circ f)(x)=\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}=\sqrt{x^2}=x,(\forall)x\in[0,1]\Rightarrow f^{-1}=f.$

Cap. V. ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ

Test de evaluare 1. Pag. 33 **1.** $x_P=\frac{x_A+3x_B}{4}=4,\ y_P=\frac{y_A+3y_B}{4}=3\Rightarrow P(4,2).\ OP=\sqrt{4^2+3^2}=$ $=5.$ **2.** A este mijlocul segmentului $[BB^1].\ x_A=\frac{x_B+x_{B^1}}{2}\Rightarrow x_{B^1}=4,\ y_A=\frac{y_B+y_{B^1}}{2}\Rightarrow y_{B^1}=-7.$ **3.** $m_{EF}=$ $=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=-1\Rightarrow m_d=1.\ d:y-2=x\Leftrightarrow x-y+2=0.$ **4.** $x+y-5=0,\ x-y+1=0$ și $a\cap b=\{M(2,3)\}.\ a,b,c$ concurente $\Rightarrow M\in c\Rightarrow 2m+6-9=0\Rightarrow m=\frac{3}{2}.$ **5.** $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=2,\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=2.$ $OG:x-y=0.$ **6.** a) Lungimea înălțimii din B este distanța de la punctul B la dreapta $AC.\ AC:x-5y-4=0.$ $d(B,AC)=\frac{|0-20-4|}{\sqrt{1+25}}=\frac{24}{\sqrt{26}};$ b) $m_{AC}=\frac{1}{5}\Rightarrow m_d=\frac{1}{5}.\ d:y-6=\frac{1}{5}(x-5)\Rightarrow x-5y+25=0;$ c) $a\in\{1,5\};$ d) $BB^1\perp AC,B^1\in(AC).\ BB^1\perp AC\Rightarrow m_{BB^1}=-5\Rightarrow BB^1$ are ecuația $5x+y-4=0.$ $BB^1\cap AC=\{D\}.\ x-5y-4=0,\ 5x+y-4=0\Rightarrow B^1\left(\frac{12}{13},\frac{-8}{13}\right).$

Test de evaluare 2. Pag. 34 **1.** $AB\parallel CD\Rightarrow m_{AB}=m_{CD}.\ -4=-\frac{3}{a}\Rightarrow a=\frac{3}{4}.$ **2.** $m_{d_1}=m_{d_2}=2\Rightarrow d_1\parallel d_2.$ Fie $A\in d_1,A(-1,4),d(d_1,d_2)=d(A,d_2)=\frac{1}{2\sqrt{5}}.$ **3.** $a\in\{-1,0\}.$ **4.** $m_d=1,\ d^1\perp d\Rightarrow m_{d^1}=-1.\ d^1:y=-x\Leftrightarrow x+y=0.$

5. $d_1 \cap d_2 = \{H\}$, H ortocentrul triunghiului ABC. $x-2y+5=0$, $2x+y=0 \Rightarrow H(-1,2)$. $CH: x-3y+7=0$.
6. $A(2,-1)$, $B(-2,1)$, $C(-2,-1)$, $G\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$. **7.** $AB: y=3$, deci este dreaptă orizontală, $AC: x=3$, deci este dreaptă verticală $\Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghic. $AB=AC=3 \Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghic isoscel.
8. $\mathcal{A}_{\Delta ABCD} = \mathcal{A}_{\Delta ABC} + \mathcal{A}_{\Delta ACD} = 16$. **9.** $m_{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{d_1} = -2$. M mijlocul segmentului $[AB]$, $M(-2,1)$, $d_1: y-1=-2(x+2) \Leftrightarrow 2x+y+3=0$. ($d_1$: mediatoarea segmentului (AB)).
$m_{BC} = -\frac{2}{3} \Rightarrow m_{d_2} = \frac{3}{2}$. N mijlocul segmentului $[BC]$, $N(3,0)$. $d_2: y = \frac{3}{2}(x-3) \Leftrightarrow 3x-2y-9=0$. ($d_2$: mediatoarea segmentului (BC)). $d_1 \cap d_2 = \{Q\}$, $2x+y+3=0$, $3x-2y-9=0 \Rightarrow \left(\frac{3}{7},-\frac{27}{7}\right)$.

Clasa a XI-a * Algebră *

Cap. I. PERMUTĂRI

Test de evaluare 1. Pag. 39 **1.** a) $\sigma^3 = e \Rightarrow \{\sigma^n \mid n \in \mathbf{N}^*\} = \{e, \sigma, \sigma^2\}$, $e \neq \sigma \neq \sigma^2 \neq e$;
b) $\sigma^x = \tau \Rightarrow x = \sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. **2.** a) $m(\theta) = 3+2+0+0+0 = 5$; b) Dacă ecuația ar admite soluția $x_0 \in S_\sigma$, am avea $\in(\theta) = \in(x_0^4) = [\in(x_0)]^4 = 1$, dar $\in(\theta) = (-1)^{m(\theta)} = -1$, așadar ecuația nu are soluții în S_σ; c) Prin calcul $\theta^4 = e$ și $\theta^2 \neq e$, $\theta^3 \neq e$, de unde deducem că
$\theta^{4k} = e$, $\theta^{4k+1} = \theta$, $\theta^{4k+2} = \theta^2$, $\theta^{4k+3} = \theta^3$ pentru oricare $k \in \mathbf{N}$. Astfel, dacă $n \in \mathbf{N}^*$ așa încât $\theta^n = \theta$, rezultă $n = 4k+1, k \in \mathbf{N}$, deci $n-1 \vdots 4$.
3. $1+\sigma(n) = 2+\sigma(n-1) = \ldots = n+\sigma(1) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}(k+\sigma(n+1-k)) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}\sigma(n+1-k)\right) =$
$= \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = n+1$ de unde $\sigma(n) = n, \sigma(n-1) = n-1, \ldots, \sigma(1) = 1$, așadar permutarea căutată este $\sigma = e$. ***Test de evaluare 2. Pag. 40*** **1.** a) Avem: $\sigma^{2017} = \sigma^{4\cdot 504+1} = (\sigma^4)^{504}\cdot\sigma = \sigma$.
$\tau^{2017} = \tau^{2\cdot 1008+1} = (\tau^2)^{1008}\cdot\tau = \tau$; b) $m(\sigma) = 2+0+2+1 = 5$, $m(\tau) = 1+0+2+1 = 4$; c) $m(\sigma) = 5 \Rightarrow \sigma$ permutare Impară. $\operatorname{sgn}(x^4) = (\operatorname{sgn} x)^4 = 1 \Rightarrow x^4$ permutare pară. Deci, $x^4 \neq \sigma, (\forall) x \in S_5$ și prin urmare ecuația $x^4 = \sigma$ nu are soluții în S_5; d) $x = \tau\cdot\sigma^{-1}$. Deci, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
2. a) $\sigma^{2019} = \sigma^{3\cdot 673} = (\sigma^3)^{673} = e$; b) $\sigma\cdot x = x\cdot\sigma$. Fie $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \in S_4$. Avem: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot$
$\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$. Dacă $a=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow c=3 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a=1$ și deci $d=4 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$. Dacă $a=2 \Rightarrow c=1 \Rightarrow b=3 \Rightarrow a=2$ și deci
$d=4 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \sigma^2$. Dacă $a=3 \Rightarrow c=2 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=3$ și deci $d=4 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \sigma$.
Dacă $a=4 \Rightarrow c=4$, fals. Deci $x \in \{e, \sigma, \sigma^2\}$; c) $x^2 = \sigma$. Înmulțind ecuația dată la stânga și apoi la dreapta cu x, obținem: $\left.\begin{matrix} x^3 = x\cdot\sigma \\ x^3 = \sigma\cdot x \end{matrix}\right| \Rightarrow x\cdot\sigma = \sigma\cdot x$ și deci soluțiile ecuației $x^2 = \sigma$ se găsesc printre soluțiile ecuației $x\cdot\sigma =$
$\sigma\cdot x \Rightarrow x \in \{e, \sigma, \sigma^2\}$. Dacă $x = e \Rightarrow x^2 = e \neq \sigma$. Dacă $x = \sigma \Rightarrow x^2 = \sigma^2 \neq \sigma$. Dacă $x = \sigma^2 \Rightarrow x^2 = \sigma^4 = \sigma^3\cdot\sigma = \sigma$.
Deci, unica soluție a ecuației $x^2 = \sigma$ este $x = \sigma^2$; d) $x^{2017} = \sigma$. Înmulțind ecuația dată la stânga și apoi la dreapta
cu $x \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^{2018} = x\cdot\sigma \\ x^{2018} = \sigma\cdot x \end{matrix}\right| \Rightarrow x\cdot\sigma = \sigma\cdot x \Rightarrow x \in \{e, \sigma, \sigma^2\}$. Dacă $x = e \Rightarrow x^{2017} = e \neq \sigma$. Dacă $x = \sigma \Rightarrow x^{2017} =$

$=\sigma^{2017}=\sigma^{3\cdot 672+1}=(\sigma^3)^{672}\cdot\sigma=\sigma$. Dacă $x=\sigma^2\Rightarrow x^{2017}=\sigma^{4034}=\sigma^{3\cdot 1344+2}=(\sigma^3)^{1344}\cdot\sigma^2=\sigma^2\neq\sigma$. Deci, unica soluție a ecuației $x^{2017}=\sigma$ este $x=\sigma$. ***Test de evaluare 3. Pag. 40*** **1.** a) $\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&4&2&3\end{pmatrix}$. $\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&1&5&3\end{pmatrix}$; b) $\sigma^{2017}=\sigma^{5\cdot 403+2}=(\sigma^5)^{403}\cdot\sigma^2=\sigma^2$. $\tau^{2017}=\tau^{6\cdot 336+1}=(\tau^6)^{336}\cdot\tau=\tau$; c) $m(\sigma)=4\Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^4=1$. $m(\tau)=1+0+2+0=3\Rightarrow\operatorname{sgn}(\tau)=(-1)^{m(\tau)}=(-1)^3=-1$; d) $\operatorname{sgn}(\tau)=-1$. $\operatorname{sgn}(x^{2018})=(\operatorname{sgn}x)^{2018}=1\Rightarrow x^{2018}\neq\tau,(\forall)x\in S_5$. Deci, ecuația $x^{2018}=\tau$ nu are soluții în S_5; e) $\tau\cdot x=\sigma\Rightarrow$ $\Rightarrow x=\tau^{-1}\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}$; f) $y\cdot\sigma=\tau\Rightarrow y=\tau\cdot\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&3&4&2\end{pmatrix}$. **2.** a) $\sigma^{2018}=\sigma^{3\cdot 672+2}=(\sigma^3)^{672}\cdot$ $\cdot\sigma^2=\sigma^2$; b) $\sigma^3=e\Rightarrow A=\{e,\sigma,\sigma^2\}\Rightarrow cardA=3$; c) $x\in\{e,\sigma,\sigma^2\}$; d) $x=\sigma^2$; e) $x^{2017}=\sigma.x=\sigma$; f) Presupunem că există $x\in S_5$, astfel încât $x^{2019}=\sigma\Rightarrow\left.\begin{matrix}x^{2020}=x\cdot\sigma\\x^{2020}=\sigma\cdot x\end{matrix}\right|\Rightarrow x\cdot\sigma=\sigma\cdot x\Rightarrow x\in\{e,\sigma,\sigma^2\}$. Dacă $x=e\Rightarrow x^{2019}=e$. Dacă $x=\sigma\Rightarrow x^{2019}=\sigma^{2019}=e$. Dacă $x=\sigma^2\Rightarrow x^{2019}=\sigma^{2\cdot 2019}=e$. Deci, ecuația $x^{2019}=\sigma$ nu are soluție în S_5.

Cap. II. MATRICE

Test de evaluare 1. Pag. 42 **1.** b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA-2abA=$ $=X(a+b-2ab)$; c) $X(a)\cdot X(a)=X(2a-2a^2)=X(0)\Rightarrow 2a-2a^2=0\Rightarrow 2a(1-a)=0\Rightarrow a=0$ sau $a=1$; d) Folosind metoda inducției matematice, avem: $A^n=(-2)^{n-1}\cdot A,(\forall)n\in\mathbf{N}^*$; e) $(X(a))^n=(I_2+aA)^n$. Deoarece matricele I_2 și aA comută, putem folosi binomul lui *Newton* și avem: $X\left(\frac{1-(1-2a)^n}{2}\right)$; f) $A\cdot X=X\cdot A$. Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. $A\cdot X=\begin{pmatrix}a+3c&b+3d\\-a-3c-b-3d\end{pmatrix}$, $X\cdot A=\begin{pmatrix}a-b&3a-3b\\c-d&3c-3d\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}a&-3c\\c&a+4c\end{pmatrix}$, $a,c\in\mathbf{R}$. **2.** a) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&0&x+y\\0&2^{x+y}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y),(\forall)x,y\in\mathbf{R}$; b) $x=0$ sau $x=-2$; c) $A(1)+A(2)+\ldots+A(2017)=$ $=\begin{pmatrix}2017&0&2017\cdot 1009\\0&2(2^{2017}-1)&0\\0&0&2017\end{pmatrix}$; d) Arătăm prin inducție matematică, că $P(n)$: $A(x_1)\cdot A(x_2)\cdot\ldots\cdot A(x_n)=$ $=A(x_1+x_2+\ldots+x_n),(\forall)x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbf{R}$ și $(\forall)n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$. Obținem că: $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2017)=$ $=A(1+2+\ldots+2017)=A\left(\frac{2017\cdot 2018}{2}\right)=A(2017\cdot 1009)$; e) Avem: $A(x)^2=A(x)\cdot A(x)=A(x+x)=A(2x)$. Arătăm prin inducție matematică că: $A(x)^n=A(nx),(\forall)n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2$; f) $A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2^x+2^{-x}&0\\0&0&2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow 2^x+2^{-x}=2,\ 2^x+\frac{1}{2^x}=2\Rightarrow(2^x-1)^2=0\Rightarrow x=0$.

Test de evaluare 2. Pag. 42 **1.** a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0_2$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0_2$; b) $A^2=$ $=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&2\end{pmatrix}=-A$, $B^2=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=B$; c) Arătăm prin inducție matematică că: $A^n=(-1)^{n-1}\cdot A,(\forall)n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$. Arătăm prin inducție matematică că: $B^n=B,(\forall)n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$; d) Deoarece $A\cdot B=B\cdot A=0_2$, putem folosi binomul lui *Newton* și avem: $(A+B)^n=C_n^0A^n+C_n^1A^{n-1}B+C_n^2A^{n-2}B^2+\ldots+C_n^nB^n=C_n^0A^n+C_n^nB^n=$ $=A^n+B^n=(-1)^{n-1}A+B$; e) Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$. $A\cdot X=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\-a-2c&-b-2d\end{pmatrix}$, $X\cdot A=\begin{pmatrix}a-b&2a-2b\\c-d&2c-2d\end{pmatrix}$. Deci, $X=\begin{pmatrix}a&-2c\\c&a+3c\end{pmatrix}$, $a,c\in\mathbf{R}$; f) Presupunem că există $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$, astfel încât $X\cdot A=B\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 2a-2b \\ c-d & 2c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ 2a-2b=2 \\ c-d=-1 \\ 2c-2d=-1 \end{cases} \Rightarrow a-b=1$, fals. Deci, ecuația $X \cdot A = B$ nu are soluții în $M_2(\mathbf{R})$. **2.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$; b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. $A \cdot X = \begin{pmatrix} a+6c & b+6d \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$, $X \cdot A = \begin{pmatrix} a & 6a+4d \\ c & 6c+4d \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+\frac{b}{2} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbf{R}$; c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, $x^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow c = 0$ sau $a+d=0$. Dacă $c=0 \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Dacă $a+d=0 \Rightarrow b(a+d)=6 \Leftrightarrow b \cdot 0 = 6$, fals. **3.**a) $A(x) - {}^tA(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 1+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & 0 & 0 \\ -3x & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$; b) $A(x) = I_3 + \begin{pmatrix} -x & 0 & 2x \\ 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 2x \end{pmatrix} = I_3 + x \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3 + x \cdot B$, unde $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Deci $A(x) \cdot A(y) = I_3 + xB + yB + xyB = I_3 + (xy+x+y) \cdot B = A(xy+x+y)$; c) Conform b), avem: $A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) = A(x^2+2x) \cdot A(x) = A(x^3+2x^2+x^2+2x+x) = A(x^3+3x^2+3x) = A(7) \Rightarrow$ $\Rightarrow x^3+3x^2+3x = 7$, $x^3+3x^2+3x-7=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+7)=0$, $x-1=0 \Rightarrow x=1$ sau $x^2+4x+7=0$, $\Delta = 16-28 = -12 < 0 \Rightarrow x = 1$; d) Conform b), avem: $A(x) \cdot A(x^2+x) = A(x^3+x^2+x+x^2+x) =$ $= A(x^3+2x^2+2x)$, $I_3 = A(0) \Rightarrow x^3+2x^2+2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2+2x+2)=0 \Rightarrow x=0$ sau $x^2+2x+2=0$; $\Delta = b^2-4ac = 4-8 = -4 < 0 \Rightarrow x = 0$; e) Avem: $A(x) \cdot A(y) = A(xy+x+y) = A((x+1)(y+1)-1)$. Arătăm prin inducție matematică, că: $A(x_1) \cdot A(x_2) \cdot \ldots \cdot A(x_n) = A((x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)-1), (\forall) x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ și $(\forall) n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Obținem: $A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(2017) = A(2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2018 - 1) = A(2018! - 1) = A(n) \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 2018! - 1$; f) Folosind inducția de la e), avem:

$$A(x)^n = \underbrace{A(x) \cdot A(x) \cdot \ldots \cdot A(x)}_{n \text{ ori}} = A\left(\underbrace{(x+1)(x+1)\ldots(x+1)}_{n \text{ ori}} - 1\right) = A((x+1)^n - 1).$$

Cap. III. DETERMINANȚI

Test de evaluare 1. Pag. 43 **1.** a) $\det A(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -15$; c) $\det A(\lg x) = (\lg x - 5)(\lg x + 3) =$ $= 0 \Rightarrow \lg x = 5 \Rightarrow x = 10^5$ sau $\lg x = -3 \Rightarrow x = 10^{-3} = \frac{1}{10^3}$. **2.** a) $D(2,1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -2$; b) $(x-3)(y-3)(y-x)$; c) $D(3^x, 9^x) = (3^x-3)(9^x-3)(9^x-3^x) = 0 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$, $9^x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. $9^x - 3^x = 0 \Leftrightarrow 3^x(3^x-1) = 0 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$. Deci $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. **3.** a) $D(1,-1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$; c) $\frac{1}{y-x} \cdot D(x,y) = xy - 5x - 5y + 3 = (x-5)(y-5) - 22 = 1 \Rightarrow (x-5)(y-5) = 23$, $x, y \in \mathbf{Z} \Rightarrow x-5, y-5 \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow x-5, y-5 \in D_{23} = \{\pm 1, \pm 23\}$. 1. $\begin{cases} x-5=1 \\ y-5=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=28 \end{cases} \Rightarrow (6,28)$; 2. $\begin{cases} x-5=-1 \\ y-5=-23 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-18 \end{cases} \Rightarrow (4,-18)$. **4.** a) $A_1(2,2)$ și $A_2(3,5)$. Ecuația dreptei A_1A_2 este: A_1A_2: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_1A_2$: $-3x+y+4=0$; b) $A_{\Delta 0A_1A_2}=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|$. $\Delta=\begin{vmatrix}0&0&1\\2&2&1\\3&5&1\end{vmatrix}=4\Rightarrow A_{\Delta 0A_1A_2}=\frac{1}{2}\cdot 4=2$; c) $A_n\in A_1A_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_1,A_2,A_n$ Coliniare. $\Delta=\begin{vmatrix}2&2&1\\3&5&1\\n+1&3n-1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow A_1,A_2,A_n$ coliniare $\Rightarrow A_n\in A_1A_2$.

Test de evaluare 2. Pag. 44 **1.** a) $A=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$; b) $\begin{vmatrix}a&f(a)&1\\b&f(b)&1\\c&f(c)&1\end{vmatrix}=A$

c) $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|$, $\Delta=\begin{vmatrix}m&f(m)&1\\n&f(n)&1\\p&f(p)&1\end{vmatrix}=A=(n-m)(p-m)(p-n)$. Cum $m,n,p\in\mathbf{Z}$cel puţin două dintre ele au aceeaşi paritate şi deci diferenţa lor este număr par. Deci, cel puţin unul dintre factorii $n-m$, $p-m$ şi $p-n$ este număr par $\Rightarrow A_{\Delta ABC}\in\mathbf{N}$. **2.** a) $\det A(1)=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=4$; b) $\det A(x)=\begin{vmatrix}x+1&1&1\\1&x^2+1&1\\1&1&x^3+1\end{vmatrix}=$

$=x^3(x^2+1)(x+1)$, $\det A(x)=0\Rightarrow x^3=0\Rightarrow x=0$. $x+1=0\Rightarrow x=-1$. $x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1$, Fals.
$\Rightarrow x\in\{-1,0\}$; c) $x\in\mathbf{N}\Rightarrow\det A(x)=x^3(x^2+1)(x+1)$. Dacă $x=0\Rightarrow\det A(x)=0$. Dacă $x=1\Rightarrow\det A(x)=4$.
Dacă $x\geq 2\Rightarrow\det A(x)\geq 8\cdot 5\cdot 2=80$ şi deci, singura soluţie naturală a ecuaţiei $\det A(x)=4$ este $x=1$.
3. a) $D(x,x)=(2x+1)(x-1)^2=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ sau $(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$; b) $D(x,-x)=$
$=(x-x+1)(x^2+x^2+1+x^2-x+x)=3x^2+1\geq 1,(\forall)x\in\mathbf{R}$; c) $D(x,y)=(x+y+1)[(x-y)^2+(x-1)(y-1)]\geq$
$\geq 0,(\forall)x,y\in[1,\infty)$. **4.** c) $x^2=A\Rightarrow\det(x^2)=\det A\Rightarrow(\det x)^2=0\Rightarrow\det x=0$.

Cap. IV. MATRICE INVERSABILE

Test de evaluare 1. Pag. 45 **1.** a) Avem: $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x&-2x\\x&1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x&-2x\\x&-x\end{pmatrix}=$

$=I_2+x\cdot B$, unde $B=\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}$. $A(x)\cdot A(y)=(I_2+xB)\cdot(I_2+yB)=I_2^2+I_2yB+xBI_2+xyB^2$.
Deci, $A(x)\cdot A(y)=I_2+yB+xB+xyB=I_2+(x+y+xy)B=A(x+y+xy)$; b) $A(x)$ inversabilă $\Leftrightarrow\det A(x)\neq 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1+2x&-2x\\x&1-x\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow 1+x\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1\Leftrightarrow x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$; c) $A(x)=A(x)^{-1}\Rightarrow A(x)\cdot A(x)=I_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x+x+x^2)=A(0)\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=-2$; d) $A(2)=\begin{pmatrix}5&-4\\2&-1\end{pmatrix}$; e) $A(2)\cdot X=A(1)\Rightarrow$
$\Rightarrow X=A(2)^{-1}\cdot A(1)$; f) $X\cdot A(2)=A(-1)\Rightarrow X=A(-1)\cdot A(2)^{-1}$. **2.** a) $A(a)$ inversabilă $\Leftrightarrow\det A(a)\neq 0$.

$(a+4)(a+1)^2\neq 0\Rightarrow a\neq -4$ şi $a\neq -1\Rightarrow a\in\mathbf{R}\setminus\{-4,-1\}$; b) $A(0)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $\det A(0)=4\neq 0\Rightarrow A(0)$

inversabilă; c) $A(0)\cdot X=B$, unde $B=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\Rightarrow X=A(0)^{-1}\cdot B$.

Test de evaluare 2. Pag. 45 **1.** a) $A(m)$ inversabilă $\Leftrightarrow\det A(m)\neq 0$; b) $A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$,

$\det A(1)=1\neq 0\Rightarrow A(1)$ inversabilă; c) $m\in\mathbf{Z}\Rightarrow\det A(m)\in\mathbf{Z}$. $A(m)^{-1}\in M_3(\mathbf{Z})\Rightarrow\det(A(m)^{-1})\in\mathbf{Z}$.
$A(m)\cdot A(m)^{-1}=I_3\Rightarrow\det\left(A(m)\cdot A(m)^{-1}\right)=\det I_3\Rightarrow\det A(m)\cdot\det\left(A(m)^{-1}\right)=1\Rightarrow\det(A(m))=\det\left(A(m)^{-1}\right)=1$.

$\det A(m)=1\Rightarrow 2m^2-m=1\Rightarrow 2m^2-m-1=0$, $m=1$; d) $A(1)\cdot X=B$, unde $B=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow X=A(1)^{-1}\cdot B\Rightarrow$

$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. **2.** a) $\det A(m)=(m+3)(m^2-3m+3)$. $\det A(m)=m+3\Rightarrow(m+3)(m^2-3m+2)=0$. Deci $m\in$ $\in\{-3,1,2\}$; b) $A(m)$ inversabilă $\Leftrightarrow\det A(m)\neq 0\Leftrightarrow(m+3)(m^2-3m+3)\neq 0\Rightarrow m\neq -3\Rightarrow m\in\mathbf{R}\setminus\{-3\}$; c) $A(0)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$, $\det A(0)=9\neq 0\Rightarrow A(0)$ inversabilă.

$A(0)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{4}{9}\\\frac{4}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}$; d) $A(0)\cdot X=A(1)\Rightarrow X=A(0)^{-1}\cdot A(1)$, $x=\frac{1}{9}=\begin{pmatrix}\frac{7}{9}&\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\\\frac{1}{9}&\frac{7}{9}&\frac{4}{9}\\\frac{4}{9}&\frac{1}{9}&\frac{7}{9}\end{pmatrix}$.

3. a) $A(x)=\begin{pmatrix}1+x&x\\2x&1+2x\end{pmatrix}=A(x)\cdot A(y)=A(x+y+3xy)$; b) $A(x)$ inversabilă $\Leftrightarrow\det A(x)\neq 0\Rightarrow x\neq-\frac{1}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; c) $A(x)^{-1}=A(x)^2\Rightarrow A(x)^3=I_2\Leftrightarrow A(x)\cdot A(x)=A(0)\Leftrightarrow A(2x+3x^2)\cdot A(x)=A(0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(3x+3x^2+6x^2+9x^3)=A(0)\Leftrightarrow 9x^3+9x^2+6x=0\Rightarrow 3x(3x^2+3x+2)=0\Rightarrow x=0$; d) $A(1)=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$.

$\det A(1)=4\neq 0\Rightarrow A(1)$ Inversabilă. $A(1)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Cap. V. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Test de evaluare 1. Pag. 47 **1.** a) Sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow\det A\neq 0$. $\det A=$ $=-m^2-4m+12\Rightarrow\det A\neq 0\Leftrightarrow m\in\mathbf{R}\setminus\{-6,2\}$;B) Sistemul este incompatibil $\Leftrightarrow\det A=0$ și $\operatorname{rang}A\neq\operatorname{rang}\overline{A}$.

$\det A=0\Rightarrow m\in\{-6,2\}$. *i)* Dacă $m=-6\Rightarrow A=\begin{pmatrix}-6&1&2\\1&-1&3\\2&1&-6\end{pmatrix}$, $\overline{A}=\begin{pmatrix}-6&1&2&-5\\1&-1&3&1\\2&1&-6&3\end{pmatrix}\Rightarrow\operatorname{rang}A=2$,

$\operatorname{rang}\overline{A}=3\Rightarrow\operatorname{rang}\overline{A}\neq\operatorname{rang}A\Rightarrow$ sistem incompatibil;

ii) Dacă $m=2\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&-1&3\\2&1&2\end{pmatrix}$, $\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\1&-1&3&1\\2&1&2&3\end{pmatrix}\Rightarrow\operatorname{rang}A=2\Rightarrow\operatorname{rang}\overline{A}=2\Rightarrow\operatorname{rang}\overline{A}=\operatorname{rang}A=2\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat. Deci, sistemul este incompatibil pentru $m=-6$; c) $m=2\Rightarrow\operatorname{rang}A=2$.

Avem minorul principal $\Delta_p=\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3\neq 0$. Avem un minor caracteristic $\Delta_c=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-1&1\\2&1&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat. Avem necunoscutele principale x,y și necunoscuta secundară $z=a\in\mathbf{R}$. Sistemul devine: $\begin{cases}2x+y=3-2a\\x-y=1-3a\end{cases}\Rightarrow 3x=4-5a\Rightarrow x=\frac{4-5a}{3}$, $y=\frac{4-5a}{3}-1+3a=\frac{4a+1}{3}$. Deci, mulțimea soluțiilor este: $S=\left\{\left(\frac{4-5a}{3},\frac{4a+1}{3},a\right)\mid a\in\mathbf{R}\right\}$. **2.** a) Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow\det A\neq 0\Rightarrow$ $\Rightarrow a^2-5a+6=0\Rightarrow(a-2)(a-3)=0\Rightarrow a_1=2,a_2=3\Rightarrow\det A\neq 0\Rightarrow a\in\mathbf{R}\setminus\{2,3\}$;B) Sistemul are soluții nenule $\Leftrightarrow\det A=0\Leftrightarrow a\in\{2,3\}$; c) $a=2\Rightarrow\begin{cases}2x+y+3z=0\\2x-y+2z=0\\2x+y+3z=0\end{cases}$, $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\2&-1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det A=0\Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat. $\operatorname{rang}A=2$. Avem minorul principal $\Delta_p=\begin{vmatrix}2&1\\2&-1\end{vmatrix}=-4\neq 0$. Avem minorul caracteristic $\Delta_c=0$. Avem necunoscutele principalr x și y, iar necunoscuta secundară $z=a$, $a\in\mathbf{R}$. Sistemul devine: $\begin{cases}2x+y=-3a\\2x-y=-2a\end{cases}\Rightarrow 4x=-5a\Rightarrow x=-\frac{5a}{4}$, $y=-3a+\frac{5a}{2}=-\frac{a}{2}$. $S=\left\{\left(-\frac{5a}{4},-\frac{a}{2},a\right)\mid a\in\mathbf{R}\right\}$.

$4x_0+2y_0+z_0=5\Rightarrow-5a-a+a=5\Rightarrow a=-1\Rightarrow S=\left(\frac{5}{4},\frac{1}{2},-1\right)$.

Test de evaluare 2. Pag. 47 **1.** b) Dacă $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \Rightarrow$ sistem compatibil determinat. Dacă $m = 1 \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat. Dacă $m = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} \overline{A} = 3 \Rightarrow$ sistem incompatibil; c) Dacă $m \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \Rightarrow$ sistem compatibil determinat (cramerian)$\Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{-m^2-2m+5}{2m-1} \Rightarrow y = \frac{(m+2)(m-1)}{2m-1} \Rightarrow z = -1$; d) $m = 1 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat. x, y necunoscute principale, $z = a$ necunoscuta secundară $\Rightarrow S = \{(1-a, 0, a) \mid a \in \mathbf{R}\}$. **2.** b) Dacă $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \Rightarrow$ sistem compatibil determinat. Dacă $a = -1 \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat. Dacă $a = 1 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} \overline{A} = 3 \Rightarrow$ sistem incompatibil; c) Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}, x_0, y_0, z_0 \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{1}{a-1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow a-1 \mid 1 \Rightarrow a-1 \in \{-1, 1\} \Rightarrow a \in \{0, 2\}$; d) $a = -1 \Rightarrow$ sistem compatibil Nedeterminat. x, y necunoscute principale, $z = a \in \mathbf{R}$ necunoscuta secundară. $\begin{cases} x-y = 1-a \\ x+y = 2a \end{cases} \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{a+1}{2}, \frac{3a-1}{2}, a\right) \mid a \in \mathbf{R}\right\}$. **3.** a) $\det A = (a+1)(a-3)$; b) $\det A \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 3\}$; c) $a = -1 \Rightarrow x, y$ necunoscute principale, $z = a$ necunoscuta secundară: $\begin{cases} x+y = -a \\ x-y = -3a \end{cases} \Rightarrow S = \{(-2a, +a, a) \mid a \in \mathbf{R}\}$; d) $a = 3 \Rightarrow x, y$ necunoscute principale, $z = a$ necunoscuta secundară: $\begin{cases} x+y = -a \\ x+3y = -3a \end{cases} \Rightarrow S = \{(0, -a, a) \mid a \in \mathbf{R}\}$.

Clasa a XI-a * Analiză *

Cap. I. LIMITE DE ȘIRURI

Test de evaluare 1. Pag. 50 **1.** a) 1; b) $\frac{1}{9}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 1; e) $-\frac{2}{3}$; f) $\frac{1}{e}$; g) e; h) $\frac{1}{e}$; i) 1. **2.** a) Prin inducție matematică arătăm că $a_n \in (0, 1)$; b) $a_{n+1} - a_n = \frac{2(a_n-1)(a_n+1)(a_n^2+1)}{5} < 0 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ descrescător; c) $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton și mărginit $\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ convergent $\Rightarrow$ există $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l \in \mathbf{R}$. Trecem la limita în relația de recurență și avem: $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2a_n^4 + 3a_n}{5} \Leftrightarrow l = \frac{2l^4 + 3l}{5} \Rightarrow l = 0$.

Test de evaluare 2. Pag. 50 **1.** a) -9; b) ∞; c) ∞; d) 1; e) 1; f) 1; **2.** a) $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}} + a\right) = \begin{cases} \infty, a > -1 \\ -\infty, a < -1 \end{cases} \neq b - 1 \Rightarrow a = -1$. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n + 5} - n\right) = 2 \Rightarrow b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3$ b) $b = -4$; c) $b = 0$. **3.** a) Prin inducție matematică; b) $a_{n+1} - a_n = -a_n \cdot \sqrt[3]{a_n} < 0 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ descrescător; c) $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton și mărginit $\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ convergent $\Rightarrow$ există $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l \in \mathbf{R}$. Trecând la limită în relația de recurență, obținem: $l = 0$.

Cap. II. LIMITE DE FUNCȚII

Test de evaluare 1. Pag. 52 **1.** a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 + \frac{e^x - 1}{x}\right)}{x\left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{3x} \cdot 3 + \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \cdot 2\right)} = \frac{3}{5}$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{\ln(x^2+x-1)}{x^2+x-2} \cdot (x^2+x-2)}{\frac{\ln(2x-1)}{2x-2}(2x-2)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{2(x-1)} = \frac{3}{2}$; c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{2^x-1}{x} \cdot x + \frac{3^x-1}{x} \cdot x + \frac{4^x-1}{x} \cdot x}{\frac{4^x-1}{x} \cdot x + \frac{1-2^x}{x} \cdot x} =$

$= \frac{\ln 2 + \ln 3 + \ln 4}{\ln 4 - \ln 2} = \frac{\ln 24}{\ln 2}$; d) $\frac{3}{4}$; e) 0; f) $\frac{2}{3}$. **2.** a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ asimptotă verticală; $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$; $n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx) = 2 \Rightarrow y = x + 2$ asimptotă oblică spre $+\infty$. Analog, $y = x + 2$ asimptotă oblică spre $-\infty$; b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x}\right)^x = e^2$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{\ln f(x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2+x+1) - \ln(x-1)}{x}} =$

$= e^0 = 1$; d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(-f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x}\right)^x = e^2$; e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x + \frac{x^2+x+1}{x-1} + x \cdot \frac{x^2+x+1}{-x^2+x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} =$

$=2$; f) 1. ***Test de evaluare 2. Pag. 53*** **1.** a) 3; b) $2+\ln 2$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{16}{5}$; e) 0; f) 0.

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}+a\right)=\begin{cases}\infty, a>-2\\ -\infty, a<-2\end{cases}$.

Dacă $a=-2\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-x+\sqrt{x^2+1}-x\right)=\frac{1}{3}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx+2}{x^2+x+1}\right)^x=\begin{cases}\infty, a>1\\ 0, a\in(-1,1)\\ \nexists, a\le -1\end{cases}$. Dacă $a=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+bx+2}{x^2+x+1}\right)^x=e^{b-1}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}-b\right)=\begin{cases}\infty, b<1\\ -\infty, b>1\end{cases}$. Dacă $b=1\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}=\frac{a}{2}$. **3.** a) Nu avem asimptote verticale și Orizontale. $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$; $n=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=1\Rightarrow y=x+1$ asimptotă oblică spre $+\infty$. Analog, $y=-x-1$ asimptotă oblică spre $-\infty$; b) e; c) 1; d) 1. **4.** a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0\Rightarrow$ nu avem asimptote verticale; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\Rightarrow$

$\Rightarrow$ nu avem asimptote orizontale; $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow n=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\infty\frac{1}{x}-1\right)=0\Rightarrow y=x$ asimptotă oblică spre $+\infty$. Analog, $y=x$ asimptotă oblică spre $-\infty$; b) 1; c) $-\frac{1}{2}$.

Cap. III. FUNCȚII CONTINUE

Test de evaluare 1. Pag. 54 **1.** a) f continuă pe $\mathbf{R}^*$ datorită operațiilor cu funcții continue. F continuă în $x_0=0\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)\Leftrightarrow\sqrt{a}+2=a+2=\sqrt{a}+2\Rightarrow a\in\{0,1\}$; b) $a\in\{-2,2\}$; c) $a=0$. **2.** a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f\sin\frac{2}{x}=$ nu există; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin\frac{2}{x}=$ nu există; $f(0)=1\Rightarrow x_0=0$ punct de discontinuitate de speța a II-a; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\ln(1-5x)}{2x}=-\frac{5}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{2x}-1}{x}=2, f(0)=2\Rightarrow x_0=0$ punct de discontinuitate de speța I; c) $x_0=1$ punct de discontinuitate de speța I. **3.** a) $a=-2$; b) $a=-2\Rightarrow f$ continuă pe $(0,\infty)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty<0, f(1)=1>0\Rightarrow$ conform proprietății *Cauchy-Bolzano*, că există cel puțin un punct $c\in(0,1)$, astfel încât $f(c)=0\Rightarrow$ ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în $(0,1)$; c) $m=1$, $n=a+2\Rightarrow$ $\Rightarrow y=x+a+2$ asimptotă oblică spre $+\infty$.

Test de evaluare 2. Pag. 55 **1.** a) $a=2$; b) $\frac{1}{e}$; c) 2; d) $a=2\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbf{R}$. Fie $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-x\Rightarrow g$ continuă pe $\mathbf{R}$. $g(3)=f(3)-3=\ln 5-1>0$, $g(4)=f(4)-4=\ln 7-2<0\Rightarrow$ există cel puțin un punct $c\in(3,4)$, astfel încât $g(c)=0\Rightarrow$ ecuația $f(x)=x$ are cel puțin o soluție în $(3,4)$. **2.** a) $a=1$; b) $y=0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$; c) 1; d) $a=1\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbf{R}$. Fie $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-e^x\Rightarrow g$ continuă pe $\mathbf{R}$. $g(2)=f(2)-e^2=9-e^2>0$, $g(3)=f(3)-e^3=16-e^3<0\Rightarrow$ există cel puțin un punct $c\in(2,3)$ astfel încât $g(c)=0\Rightarrow$ ecuația $f(x)=e^x$ are cel puțin o soluție în $(2,3)$. **3.** A) $a=-1$; b) 3; c) e^2; d) $a=-1\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbf{R}$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty<0, f(1)=1>0\Rightarrow$ există cel puțin un punct $c\in(0,1)$, astfel încât $f(c)=0\Rightarrow$ ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în $(0,1)$.

Cap. IV. FUNCȚII DERIVABILE

Test de evaluare 1. Pag. 56 **1.** a) f continuă pe $\mathbf{R}$ datorită operațiilor cu funcții continue.

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4x}, x\in(-\infty,-4]\cup[0,\infty)\\ \sqrt{-x^2-4x}, x\in(-4,0)\end{cases}$. Studiem derivabilitatea în $x_0=-4$. $f'_s(-4)=-\infty$;

$f'_d(-4)=+\infty\Rightarrow x_0=-4$ punct de întoarcere al graficului $\Rightarrow f$ derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{-4,0\}$; b) $y-f(-1)=$

$=f'(-1)(x+1)\Rightarrow y-\sqrt{5}=-\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)\Rightarrow 2x+y\sqrt{3}-\sqrt{15}+2=0$; c) $m=2\Rightarrow y=x+2$ asimptotă oblică spre $+\infty$. **2.** a) $x=0$; b) $x=\frac{1+\sqrt{37}}{6}$; c) $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$. **3.** a) $x=0$; b) $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$; c) $x=0$.

Test de evaluare 2. Pag. 57 **1.** a) f continuă în $x_0=0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)\Rightarrow b=2$.

f derivabilă în $x_0=0\Rightarrow f'_s(0)=f'_d(0)\in\mathbf{R}\Rightarrow a=3$; b) $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-\ln 4-2=\frac{3}{4}(x-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow 4y-3x-4\ln 4-5=0$; c) $A(-1,-2)$. **2.** a) $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}, f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$; b) Prin inducție matematică; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(3)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=0$. **3.** a) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)$; b) $y=e(x-1)$; c) $x=-1$. **4.** a) $A(-1,\sqrt{2}+1)$; b) $f''(x)=\frac{2}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}\geq 0,(\forall)x\in\mathbf{R}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1\Rightarrow y=1$ asimptotă orizontală spre $+\infty$, $m=-2$, $n=-1\Rightarrow y=-2x-1$ asimptotă oblică spre $-\infty$.

Cap. V. TEOREMELE FERMAT, ROLLE, LAGRANGE, L' HOSPITAL

Test de evaluare 1. Pag. 59 **1.** a) $m=2$, $n=0\Rightarrow y=2x$ asimptotă oblică spre $+\infty$. $m=\infty\Rightarrow f$ nu are asimptote spre $-\infty$; b) $a=1$; d) 0; e) e. **2.** a) $f'(x)=-\frac{1}{x^2+1}, f''(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$; b) Fie $g:(0,\infty)\to\mathbf{R}, g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow g'(x)=0,(\forall)x\in(0,\infty)\Rightarrow g$ Constantă. $g(1)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow g(x)=\frac{\pi}{2}$; c) $f:[k,k+1]\to\mathbf{R}, f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ este continuă și derivabilă și conform teoremei lui *Lagrange* $\Rightarrow$ există $c\in(k,k+1)$, astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(c)=-\frac{1}{c^2+1}; c\in(k,k+1)\Rightarrow -\frac{1}{1+k^2}<f'(c)<-\frac{1}{1+(k+1)^2}\Rightarrow$ $\Rightarrow -\frac{1}{1+k^2}<f(k+1)-f(k)<-\frac{1}{1+(k+1)^2}$; d) Conform punctului c) $\Rightarrow -\frac{1}{1+x^2}<f(x+1)-f(x)<$ $<-\frac{1}{1+(x+1)^2}\Rightarrow -\frac{x^2}{1+x^2}<x^2(f(x+1)-f(x))<-\frac{x^2}{1+(x+1)^2}$ și din criteriul cleștelui $\Rightarrow$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}x^2(f(x+1)-f(x))=-1$. ***Test de evaluare 2. Pag. 59*** **1.** a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\infty\Rightarrow x=0$ asimptotă verticală, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty, m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty\Rightarrow f$ nu are asimptotă spre $+\infty$; b) Fie $g:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-a\ln x-1\Rightarrow g$ derivabilă. Inegalitatea devine $g(x)\geq g(1),(\forall)x\in(0,\infty)\Rightarrow x=1$ punct de minim și conform Teoremei lui *Fermat* $\Rightarrow g'(1)=0\Rightarrow a=0$; d) e^3. **2.** a) $f'(x)=3x^2+\frac{1}{x}>0,(\forall)x\in(0,\infty)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(0,\infty)\Rightarrow f$ injectivă; f continuă pe $(0,\infty)\Rightarrow f$ are proprietatea lui *Darboux*. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Rightarrow \operatorname{Im}f=\mathbf{R}\Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă; b) $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(x_0)}$, unde $f(x_0)=2$.

$$\left.\begin{array}{c} f(x_0)=2\\ f(1)=0\\ f\text{ bijectivă}\end{array}\right|\Rightarrow x_0=1\Rightarrow (f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4};$$

c) 1; d) $a=4$; e) f continuă pe $(0,\infty)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=-\infty<0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\infty>0\Rightarrow$ ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în $(0,\infty)$. f este injectivă $\Rightarrow$ ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în $(0,\infty)$. **3.** a) f continuă $\Rightarrow b=-2. f'(x)=\begin{cases}4x^3+a, x<0\\ \frac{1}{x+1}, x>0\end{cases}$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f'(x)\Rightarrow a=1$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow f$ nu are asimptotă spre $+\infty$; c) Aplicând Teorema lui *Lagrange* pe intervalul $[k,k+1]\Rightarrow$ există $c\in(k,k+1)$, astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(c)=\frac{1}{c+1}$. $c\in(k,k+1)\Rightarrow\frac{1}{k+2}\leq\frac{1}{c+1}\leq\frac{1}{k+1}\Rightarrow\frac{1}{k+2}\leq f(k+1)-f(k)\leq\frac{1}{k+1}$; d) Din Teorema lui *Lagrange* $\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{1}{x+2}\leq f(x+1)-f(x)\leq\frac{1}{x+1}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}x(f(x+1)-f(x))=1$; e) 1; f) 1.

Cap. VI. ROLUL DERIVATELOR ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

Test de evaluare 1. Pag. 60 **1.** a) $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; b) $f'(x)=0\Rightarrow x=-2$ sau $x=0\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)\geq f(0),(\forall)x>-1\Rightarrow f(x)\geq -1,(\forall)x>-1$; c) f concavă pe $(-\infty,-1)$ și convexă pe $(-1,\infty)$. **2.** a) f strict descrescătoare pe $(-\infty,-1)$; f strict crescătoare pe $(-1,\infty)$; b) Din monotonie $\Rightarrow f(x)\geq f(-1),(\forall)x\in\mathbf{R}\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)\geq\ln 2,(\forall)x\in\mathbf{R}$; c) $f''(x)=\frac{2(-x^2-2x+1)}{(x^2+2x+3)^2}, f''(x)=0\Rightarrow x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}, x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$ puncte de inflexiune. f concavă pe $(-\infty,-1,-\sqrt{2})$ și pe $(-1+\sqrt{2},\infty)$, f convexă pe $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$; d) Fie $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, g(x)=f(x)-1, g'(x)=f'(x), g'(x)=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow g$ strict descrescătoare pe $(-\infty,-1)$ și strict crescătoare pe $(-1,\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\infty$, $g(-1)=\ln 2-1=\ln\frac{2}{e}<0\Rightarrow$ ecuația $g(x)=0$ are cel puțin o soluție în $(-\infty,-1)$. g injectivă pe $(-\infty,-1)\Rightarrow$ ecuația $g(x)=0$ are soluție unică în $(-\infty,-1)$. Analog, ecuația $g(x)=0$ are soluție unică în $(-1,\infty)$. Deci, ecuația $f(x)=1$ are exact două soluții reale.

Test de evaluare 2. Pag. 61 **1.** a) $f'(x)=\frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}$, f strict descrescătoare pe $(-\infty,2)$ și pe $(2,3)$, f strict crescătoare pe $(3,\infty)$; b) Din monotonie $\Rightarrow f(x)\geq f(3),(\forall)x>2\Rightarrow f(x)\geq e^3,(\forall)x>2$; C) $f''(x)=\frac{e^x(x^2-6x+10)}{(x-2)^3}$, f concavă pe $(-\infty,2)$ și convexă pe $(2,\infty)$. **2.** a) $f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2+x-2}{x^2}\right)$, $f'(x)=0\Rightarrow x=1, x=2$. f strict crescătoare pe $(-\infty,-2)$ și pe $(1,\infty)$, f strict descrescătoare pe $(-2,0)$ și pe $(0,1)$; b) Din monotonie $\Rightarrow f(x)\geq f(1),(\forall)x>0\Rightarrow f(x)\geq -\frac{1}{e},(\forall)x>0$; c) $f''(x)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{5x-2}{x^4}$. f concavă pe $(-\infty,0)$ și pe $\left(0,\frac{2}{5}\right)$, f convexă pe $\left(\frac{2}{5},\infty\right)$. **3.** a) $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $f'(x)=0\Rightarrow x=2$. $x=2$ punct de extrem local; b) $f''(x)=\frac{4-x}{x^4}$, $f''(x)=0\Rightarrow x=4$. $x=4$ punct de inflexiune; c) Din monotonie $\Rightarrow f(x)\geq f(2),(\forall)x\in(0,\infty)$ rezultă $f(x)\geq\ln(2e),(\forall)x\in(0,\infty)$; d) Fie $g:(0,\infty)\to\mathbf{R}, g(x)=f(x)-2\Rightarrow g$ continuă, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}g(x)=+\infty$, $g(2)=f(2)-2=\ln 2e-2=\ln\frac{2}{e}<0\Rightarrow$ ecuația $g(x)=0$ are cel puțin o rădăcină în $(0,2)$. $g'(x)=f'(x)<0,(\forall)x\in(0,2)\Rightarrow g$ strict descrescătoare pe $(0,2)\Rightarrow$ ecuația $g(x)=0$ are soluție unică în $(0,2)$. Analog, $g(x)=0$ are soluție unică în $(2,\infty)$. Deci, ecuația $f(x)=2$ are exact două soluții reale.

*Clasa a XII-a * Algebră **

Cap. I. STRUCTURI ALGEBRICE

Test de evaluare 1. Pag. 73 **1.** a) $e=-2$; c) $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 2017 ori}}=(x+3)^{2017}-3, x=-4$. **2.** b) $U(\mathbf{Z}_{12})=\{\hat{1},\hat{5},\hat{7},\widehat{11}\}$; c) $x\in\{\hat{3},\hat{7},\widehat{11}\}$. **3.** a) $A^2=3A\Rightarrow x(m)\cdot x(n)=I_3+(m+n+3mn)A$; b) Pentru $t\neq-\frac{1}{3}$, $x(t)\cdot x\left(\frac{-t}{1+3t}\right)=x(0)=I_3$; c) $x\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x(m)=x\left(-\frac{1}{3}\right)=x(n)\cdot x\left(-\frac{1}{3}\right),(\forall)m,n\in\mathbf{R}$. **4.** a) 0.

Test de evaluare 2. Pag. 73 **1.** a) $e=\frac{7}{2}$; b) $U=\mathbf{R}-\{3\}$; c) $x\in\left\{16,\frac{1}{16}\right\}$. **2.** c) $g(x)=\ln f(x),(\forall)x\in G$, unde f este funcția de la b). **4.** a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{2}\\\hat{1}&\hat{0}\end{pmatrix}$; b) $x=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{0}&\hat{1}\\\hat{2}&\hat{1}&\hat{0}\end{pmatrix}$; c) $x_1=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{2}\\\hat{1}&\hat{1}\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}\\\hat{2}&\hat{2}\end{pmatrix}$.

Test de evaluare 3. Pag. 74 **2.** c) $x=1$. **3.** A) $A^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$; $A^4=I_3$; b) $A^n=\begin{cases}A, n=4k+1\\A^2, n=4k+2\\A^3, n=4k+3\\I_3, n=4k\end{cases}$, $k\in\mathbf{N}$. c) Folosind a) realizăm tabla operației pe G.

Test de evaluare 4. Pag. 75 **1.** c) $f\left(\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\ldots\circ\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{(n-1)!}\Rightarrow\frac{1}{2}\circ\ldots\circ\frac{1}{n}=\frac{1}{(n-1)!+1}$. **2.** b) $x\circ 3=3\circ y=3,(\forall)x,y\in\mathbf{R}$; c) $x\in\{2;4\}$. **3.** c) Folosim metoda inducției matematice. **4.** a) $\{(\hat{3},\hat{3}),(\hat{3},\hat{0})\}$; b) $\{(\hat{0},\hat{1});(\hat{1},\hat{0});(\hat{2},\hat{3});(\hat{3},\hat{2})\}$; c) $\{(\hat{1},\hat{1},\hat{2});(\hat{4},\hat{4},\hat{5})\}$.

Cap. II. POLINOAME

Test de evaluare 1. Pag. 77 **1.** a) $f(-1)=2a+3$; b) $f=(x-1)\cdot(x^3+x^2+(1+a)\cdot x)+1$; c) Dacă există $i\in\overline{1,4}$, astfel încât $x_i\in\mathbf{Z}$, cum $f\in\mathbf{Z}[X]$, deducem că $x_i\mid 1\Rightarrow f(1)\cdot f(-1)=0\Rightarrow 1\cdot(2a+3)=0\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\notin\mathbf{Z}$, fals! **2.** a) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=S_1^2-2S_2=(-2)^2-2a=4-2a$; b) Pentru $a=3$, avem $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_2^2=-2<0$; c) $f(1)=3, f(-1+\sqrt{2})=f(-1-\sqrt{2})=0$, etc. **3.** a) $x_1=1+\sqrt{2}$ și $f\in\mathbf{Q}[x]\Rightarrow x_2=1-\sqrt{2}$, $x_1x_2+x_3(x_1+x_2)=-3\Rightarrow x_3=-1$; b) Nu există; c) $m=0$. **4.** b) 4; c) $\hat{a}\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{4},\hat{6}\}$.

Test de evaluare 2. Pag. 77 **1.** a) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-6<0$; b) $x_1=ai, a\in\mathbf{R}^*\Rightarrow x_2=-ai\Rightarrow x_3=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm i\sqrt{3}$; c) $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-1\Rightarrow -x_1^3-x_2^3-x_3^3=3(x_1+x_2+x_3)+3\cdot 1=3$.

2. a) $a \in \{-1,-7,3,-11\}$; b) $S_1^2 - 2S_2 = \frac{9-4a}{4} < 0$ pentru $a > \frac{9}{4}$; c) $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}$. **3.** a) $\hat{a} = \hat{2}$; b) $f = 2(x+\hat{1})^3$; c) Reductibil în $\mathbf{Z}_3[x]$, $a \in \{\hat{0},\hat{2}\}$. **4.** a) $a = -2$; $b = 0$; c) $b = 1$, $a = -2$, etc.

Test de evaluare 3. Pag. 78 **1.** a) $f(-1) = 0 \Rightarrow m = 1$; b) $m \in \{-1;3\}$; c) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Z} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1-m}{2} \in \mathbf{Z} \Rightarrow m$ impar și $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{m}{2} \in \mathbf{Z}$, deci m simultan este par și impar: imposibil! **2.** a) $a = -2$; $b = 4$; c) $x_1x_2x_3x_4 = 2 \Rightarrow x_i \neq 0$, $i = \overline{1,4} \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i^3 + 3\sum_{i=1}^{4} x_i + 4b + 2\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i} = 0$. $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = S_1^2 - 2S_2 = a^2 - 6$; $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i} = \frac{S_3}{S_4} = \frac{-b}{2}$, etc. **3.** b) $x_{1,2} = \pm i$, $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; c) 5. **4.** a) $a = b = -1$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3^3 = x_4^3 = 1$ și $x_{3,4} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, de unde $x_1^{2018} + x_2^{2018} + x_3^{2018} + x_4^{2018} = 4$; c) $x^2 + x + 1$.

*

* *

BAREM DE REZOLVARE

TESTUL 1

Subiectul I.

1.	$3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$. **3p** $\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{8}=1$. **2p**
2.	$f(-5)=0, f(5)=0$. **2p** $f(-5)+f(5)=0$. **3p**
3.	$x-2=16$. **3p** $x=18$, care verifică ecuația. **2p**
4.	Mulțimea M are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile **1p** în mulțimea M sunt 3 elemente divizibile cu 3, deci sunt 3 cazuri favorabile. **2p** $p=\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}=\frac{3}{10}$. **2p**
5.	$x_M=3$. **2p** $y_M=9$, unde M este mijlocul segmentului AB. **3p**
6.	$BC=10$. **3p** $p=24$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix}4&3\\2&1\end{vmatrix}=4\cdot1-2\cdot3=$ **3p** $=8-6=-2$. **2p**
1. b)	$A-B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&3\\2&0\end{pmatrix}=$ **2p** $=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$. **3p**
1. c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}18&12\\8&6\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}18&12\\8&6\end{pmatrix}$. **3p** $AB+BA=\begin{pmatrix}36&24\\16&12\end{pmatrix}$. **2p**
2. a)	$f(-3)=(-3)^3+3\cdot(-3)^2+(-3)+3=$ **3p** $=-27+27-3+3$. **2p**
2. b)	Câtul este x^2+1. **3p** Restul este 0. **2p**
2. c)	$x_1+x_2+x_3=-3$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=-3$. **3p** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{1}{3}$. **2p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=12x^2+12x=$ **3p** $=12x(x+1), x\in\mathbf{R}$. **2p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2+12x}{4x^3+6x^2+2-4x^3}=$ **3p** $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2+12x}{6x^2+2}=\frac{12}{6}=2$. **2p**
1. c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=0$ și $x_2=-1$. **2p** f crescătoare pe $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$ și f descrescătoare pe $[-1,0]$. **3p**
2. a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(8x^3+3x^2)dx=\int_0^1 8x^3dx+\int_0^1 3x^2dx=\frac{8x^4}{4}\Big\|_0^1+\frac{3x^3}{3}\Big\|_0^1=3$. **5p**
2. b)	$F(x)=\int f(x)dx=\int(8x^3+3x^2)dx=\int 8x^3dx+\int 3x^2dx=2x^4+x^3+\mathscr{C}$. **3p** $F(1)=2017\Rightarrow\mathscr{C}=2014$. **2p**
2. c)	$\int_0^n(8x^3+3x^2)dx=2x^4\,\|_0^n+x^3\,\|_0^n=2n^4+n^3$. $2n^4+n^3=2n^4\Leftrightarrow n^3=0\Leftrightarrow n=0\in\mathbf{N}$. **5p**

TESTUL 2

Subiectul I.

1.	Termenii şirului sunt în progresie aritmetică de raţie $r = 3 - 1$, $r = 2$. $a_{10} = a_1 + 9r = 19$. **5p**
2.	$x^2 - 8x + 12 < 0 \Leftrightarrow x \in (2,6)$. **3p** $x \in (2,6) \cap \mathbf{Z} \Rightarrow x \in \{3,4,5\}$. **2p**
3.	Condiţii $\left.\begin{array}{l} x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \\ x-3>0 \Leftrightarrow x>3 \end{array}\right\} \Rightarrow x>3 \Leftrightarrow x \in (3,+\infty)$. **2p** $\log_2(x-1) - \log_2(x-3) = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \log_2 \frac{x-1}{x-3} = 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3} = 2^2 \Leftrightarrow x - 1 = 4x - 12 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3}$. **3p**
4.	Numărul cazurilor posibile este 10, numărul cazurilor favorabile este 3. Probabilitatea este $\frac{3}{10}$. **5p**
5.	$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B}}{2} = \mathbf{2p} = \frac{4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 6$. **3p**
6.	Punctul este pe dreaptă dacă $x = 1$, $y = m$. **3p** $1 - m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 9$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{2p} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. **3p**
1. b)	$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 50$. **5p**
1. c)	$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **2p** $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$. **3p**
2. a)	$x * y = 3xy + 3x + 3y + 2 = 3x(y+1) + 3(y+1) - 1 = 3(y+1)(x+1) - 1$. **5p**
2. b)	$2 * 3 = 3(2+1)(3+1) - 1 = 35$. **5p**
2. c)	$x * x = -1 \Leftrightarrow 3(x+1)(x+1) - 1 = -1 \Leftrightarrow 3(x+1)^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow 3(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = 2x + 5$. **2p** $f'(2) = 9$. **3p**
1. b)	$\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 9$. **5p**
1. c)	$f''(x) = 2$. **3p** $2 > 0 \Rightarrow f$ este convexă pe **R**. **2p**
2. a)	F este o primitivă a lui $f \Leftrightarrow F$ derivabilă şi $F'(x) = f(x)$. **2p** $F'(x) = e^x(x+3) + e^x = e^x(x+4)$. **3p**
2. b)	$\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = \mathbf{2p} = 4e - 3$. **3p**
2. c)	$\int_0^1 f(x) \cdot F(x)dx = \int_0^1 F'(x) \cdot F(x)dx = \frac{F^2(x)}{2}\Big|_0^1 = \frac{16e^2 - 9}{2}$. **5p**

TESTUL 3

Subiectul I.

1.	$2x=\frac{x-1+x+5}{2}$. **2p** $4x=2x+4\Rightarrow x=2$. **3p**
2.	$x_1+x_2=5$ și $x_1\cdot x_2=6$. **2p** $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{3}$. **3p**
3.	$\log_3 9=2$. **2p** $\log_3 x=2\Rightarrow x=9>0$. **3p**
4.	$C_5^3=10$, $A_5^3=60$, $P_2=2$. **3p** $\frac{C_5^3+A_5^3}{P_2}=\frac{70}{2}=35$. **2p**
5.	Punctul de intersecție a dreptelor este soluția sistemului $\begin{cases}x+y=3\\2x-3y=6\end{cases}$. **2p** $x=3, y=0$. **3p**
6.	$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3p** $\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{6}}{4}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-4\\3&-1\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}-2&-3\\-5&-8\end{pmatrix}$. **3p** $AB-BA=\begin{pmatrix}3&-1\\8&7\end{pmatrix}$. **2p**
1. b)	$\det A=\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=1\cdot 3-2\cdot 1=$ **2p** $=3-2=1$. **3p**
1. c)	$\det A=1$, $A^*=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*$. **3p** $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$. **2p**
2. a)	$f=(x-1)(x^2+1)$. **3p** Câtul este $x-1$ și restul 0. **2p**
2. b)	$2g=2x^2+2$. **2p** $f-2g=x^3-x^2+x-1-2x^2-2=x^3-3x^2+x-3$. **3p**
2. c)	$f(1)=0, g(0)=0$. **3p** $f(1)+g(0)=1$. **2p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}(2x^2-1)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}(4x-3)=1, f(1)=1$. **3p** $l_s(1)=l_d(1)=f(1)\Rightarrow f$ continuă. **2p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2}=$ **2p** $=$ (*L'Hospital*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{2x}=2$. **3p**
1. c)	Ecuația tangentei în punctul $(2,f(2))$ la graficul funcției f este $y-f(2)=$ $=f'(2)(x-2), f(2)=7, f'(2)=8, 8x-y-9=0$. **5p**
2. a)	$F'(x)=f(x), (\forall)x\in\mathbf{R}$. **2p** $F'(x)=(e^x)'(x^2+2x+2)+e^x(x^2+2x+2)'=e^x(x^2+2x+2+2x+2)=$ $=e^x(x^2+4x+4)=f(x)$. **3p**
2. b)	$F''(x)>0\Rightarrow F$ este convexă pe $(-\infty,-4)\cup(-2,+\infty)$. **2p** $F''(x)=f'(x)=e^x(x^2+4x+4)+e^x(2x+4)=e^x(x^2+6x+8)>0$ pentru $x\in(-\infty,-4)\cup(-2,+\infty)$. **3p**
2. c)	$\mathcal{A}=\left\lvert\int_0^1 f(x)dx\right\rvert=F(x)\Big\rvert_0^1=F(1)-F(0)=5e-2$. **5p**

TESTUL 4

Subiectul I.

1.	$\log_2 4 = 2$, $\log_2 16 = 4$. **3p** $3 \in [2,4]$. **2p**
2.	$2^{x^2-5x+8} = 2^2$. **2p** $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 2$. **3p**
3.	Numărul cazurilor favorabile este 2, numărul cazurilor posibile este 10. **3p** $P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. **2p**
4.	$S_5 = b_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}, q = 3$. **3p** $S_5 = 2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 242$. **2p**
5.	$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (2+1)^2}$. **3p** $m = \sqrt{25} \Rightarrow m = 5$. **2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2}$. **3p** $A_{BC} = 6\sqrt{3}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$. **5p**
1. b)	Cum $(A - \sqrt{2} \cdot I_2) \cdot (A + \sqrt{2} \cdot I_2) = -2 \cdot I_2$ **3p** deducem că $B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot (A + \sqrt{2} \cdot I_2)$. **2p**
1. c)	$\det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} - x & 1 \\ -2 & -\sqrt{2} - x \end{vmatrix}$. **2p** $\det(A - xI_2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. **3p**
2. a)	$xy - 4x - 4y + 20 = x(y-4) - 4(y-4) + 4 = (x-4)(y-4) + 4$. **5p**
2. b)	$2017 * 4 = (2017-4)(4-4) + 4 = 4$. **3p** $4 * 2018 = 4$. **2p**
2. c)	$\underbrace{1 * 2 * 3}_{a} * 4 * \underbrace{2 * \cdots * 2017}_{b} = a * 4 * b =$ **2p** $= [(a-4)(4-4)+4] * b = 4 * b = (4-4)(b-4) + 4 = 4$. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (2x+1) = 3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} ax = a$. **3p** $a = 3$. **2p**
1. b)	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$. **2p** $f'(x) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$. **3p**
1. c)	$\begin{array}{c\|cc} x & 1 & +\infty \\ \hline f'(x) & ++++ & \\ \hline f(x) & \nearrow & \end{array}$ **3p** f este crescătoare pe $(1+\infty)$. **2p**
2. a)	$\int_0^1 (x+2) \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. **5p**
2. b)	$\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}dx = \int_0^1 \frac{x^2 - 4 + 4}{x+2}dx = \int_0^1 (x-2)dx + 4\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1 + 4\ln(x+2) =$ $= -\frac{3}{2} + 4\ln\frac{3}{2}$. **5p**
2. c)	$\int_0^1 [f(x) + xf'(x)]dx = \int_0^1 [x \cdot f(x)]^1 dx = xf(x)\Big|_0^1 = f(1) = \frac{1}{3}$. **5p**

TESTUL 5

Subiectul I.

1.	$\log_5 10+\log_5 2-\log_5 4=\log_5\frac{10\cdot 2}{4}=$ **3p** $=\log_5 5=1$. **2p**
2.	$f(m)=0\Leftrightarrow 3^m-9=0$. **2p** $m=2$. **3p**
3.	$(i+2)^2+(i-2)^2=i^2+2i+4+i^2-2i+4=$ **3p** $=6\in\mathbf{N}$. **2p**
4.	Fie x prețul inițial al produsului, $x+\frac{10}{100}x=550$. **2p** $x=500$. **3p**
5.	$y-2=3(x-1)$. **3p** $3x-y-1=0$. **2p**
6.	$\sin 120^\circ=\sin 2\cdot 60^\circ=2\sin 60^\circ\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$x=1, y=1, z=1$. **5p**
1. b)	$\det A=-a-1$. **5p**
1. c)	A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$. **2p** $a\neq -1$. **3p**
2. a)	$x(y-2)-2(y-2)+2=(x-2)(y-2)+2$. **5p**
2. b)	$(2-2)(2017-2)+2=0+2=2$. **5p**
2. c)	$(x-2)^3+2=2$. **3p** $(x-2)^3=0\Rightarrow x=2$. **2p**

Subiectul III.

1. a)	f continuă și derivabilă pe $(-\infty,2)$ și respectiv $(2,\infty)$ ca funcții elementare. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x^2=4, \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(5x-6)=4, f(2)=4\Rightarrow f$ este continuă în $x_0=2\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbf{R}$. **2p** $f'_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x+2)=4$. Analog $f'_d(2)=5$. **2p** Cum $f'_s(2)\neq f'_d(2)$, deducem că f este derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{2\}$. **1p**
1. b)	$f(-2)=4, f(0)=0, f(2)=4$. **3p** $f(-2)+f(0)+f(2)=8$. **2p**
1. c)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$. **3p** $f'(0)=0$deoarece $f'(x)=2x$. **2p**
2. a)	$\int_1^e\left[f(x)-\frac{1}{x+1}\right]dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$ **3p** $=\ln e-\ln 1=1$. **2p**
2. b)	$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{1}{x+1}dx+\int_1^2\frac{1}{x}dx=$ **2p** $=\ln(x+1)\,\vert_1^2+\ln x\,\vert_1^2=\ln 3$. **3p**
2. c)	$\mathcal{A}=\left\vert\int_2^3 g(x)dx\right\vert=\left\vert\int_2^3\frac{1}{x}dx\right\vert=$ **3p** $=\ln x\Big\vert_2^3=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$. **2p**

TESTUL 6

Subiectul I.

1.	$\log_3(\sqrt{5}+\sqrt{2})+\log_3(\sqrt{5}-\sqrt{2})=\log_3(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=\log_3 3=1$. **5p**
2.	$3^{x^2-3}=3^{-3}$. **3p** $x^2-3=-3\Rightarrow x=0$. **2p**
3.	Numărul cazurilor posibile este 5, numărul cazurilor favorabile este 2. **3p** $P=\frac{2}{5}$. **2p**
4.	$f(1)=2$. **3p** $1+1+m=2\Rightarrow m=0$. **2p**
5.	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$. **3p** $x-y-1=0$. **2p** Sau $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ etc.
6.	$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 60°$. **3p** $BC=\sqrt{13}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **2p** $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **3p**
1. b)	$\det A\neq 0$, $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. **2p** $\det A=-6$. **3p**
1. c)	$D=-6$, $D_x=-6$, $D_y=-6$, $D_z=-6$. **3p** $x=\frac{D_x}{D}\Rightarrow x=1$, $y=\frac{D_y}{D}\Rightarrow y=1$, $z=\frac{D_z}{D}\Rightarrow z=1$. **2p**
2. a)	$r=f(1)$. **3p** $f(1)=-2$. **2p**
2. b)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-4$, $x_1x_2x_3=-1$, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=4$. **5p**
2. c)	$x_1^3-4x_1+1=0$, $x_2^3-4x_2+1=0$, $x_3^3-4x_3+1=0$. **3p** $x_1^3+x_2^3+x_3^3-4(x_1+x_2+x_3)+3=0$. Cum $x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3$. **2p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=3x^2-12x+9$, **2p** $f(1)=5$, $f'(1)=0\Rightarrow f(1)+f'(1)=5$. **3p**
1. b)	$f'(x)=0$, $x_1=1$, $x_2=3$. **2p** $A(1,5)$este punct de maxim, iar $B(3,1)$ este punct de minim. **3p**
1. c)	$y-3=f'(3)(x-3)$. **3p** $y=3$ este ecuația tangentei. **2p**
2. a)	$\int_0^1 f(x)\cdot\frac{1}{e^x}dx=\int_0^1 x\,dx=$ **2p** $=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$. **3p**
2. b)	$\mathcal{A}=\left\|\int_0^1 f(x)dx\right\|=\left\|\int_0^1 x\cdot e^x dx\right\|=1$. **5p**
2. c)	$\int_0^1 f(x)dx=ae^a-e^a+1$. **3p** $ae^a-e^a+1>ae^a-e^a\Rightarrow 1>0$ evident. **2p**

TESTUL 7

Subiectul I.

1.	$\frac{2-i}{4-i^2}+\frac{2+i}{4-i^2}=$ **2p** $=\frac{2-i+2+i}{4-i^2}=\frac{4}{5}$. **3p**
2.	$2x-4=x+1\Rightarrow x=5$. **3p** $f(5)=6\Rightarrow A(5,6)$ este punctul de intersecție. **2p**
3.	$x^2+5=9$. **3p** $x=\pm 2$. Condiția de existență este $x\in\mathbf{R}$, deci $x=\pm 2$. Soluții. **2p**
4.	$x-\frac{20}{100}\cdot x=240$. **3p** $\frac{80}{100}x=240\Rightarrow x=300$. **2p**
5.	$2\vec{v_1}-\vec{v_2}=2\left(\vec{2i}+\vec{3j}\right)-\left(\vec{i}-\vec{2j}\right)=$ **3p** $=\vec{3i}+\vec{8j}$. **2p**
6.	$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$ **2p** $\Rightarrow \cos A=\frac{25-36}{24}<0\Rightarrow \sphericalangle A$ obtuz. **3p**

Subiectul II.

1. a)	$1+2-3a=0$. **3p** $a=1$. **2p**
1. b)	$\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&1\\3&4&1\end{vmatrix}=0$. **3p** $3+8+6-9-4-4=0\Rightarrow A_0,A_1,A_2$ coliniare. **2p**
1. c)	$A_1A_2=\sqrt{(3-2)^2+(4-3)^2}=$ **3p** $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. **2p**
2. a)	Dacă a este rădăcină, atunci $a^3+2a-1=0\Rightarrow$ **3p** $a^3=1-2a$. **2p**
2. b)	Restul este $f(1)$. **3p** $f(1)=2$. **2p**
2. c)	$x_1^3+2x_1-1=0, x_2^3+2x_2-1=0, x_3^3+2x_3-1=0, x_1^3+x_2^3+x_3^3+2(x_1+x_2+x_3)-1=0$. Știind că $x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=1$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=$ **3p** $1\Rightarrow y=1$ este ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$. **2p**
1. b)	$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=$ **3p** $\frac{1}{(x+1)^2}>0, (\forall)x\in(-1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare. **2p**
1. c)	$f'(0)=1, y-1=x$. **3p** $x-y+1=0$ este ecuația tangentei. **2p**
2. a)	$\int_0^1\frac{f_1(x)}{x}dx=\int_0^1\frac{x\cdot e^x}{x}dx=\int_0^1 e^x dx=$ **3p** $=e^x\,|_0^1=e-1$. **2p**
2. b)	$\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 x\cdot e^x dx=x\cdot e^x\Big\|_0^1-e^x\Big\|_0^1=$ **3p** $=e-e+1=1$. **2p**
2. c)	Știind că $e^x\geq 1, (\forall)x\in[0,1]$, rezultă că $\int_0^1 x^n e^x dx\geq\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1=\frac{1}{n+1}$. **5p**

TESTUL 8

Subiectul I.

1.	$x^2=(x-1)(x+2)\Rightarrow$ **3p** $x^2=x^2+x-2\Rightarrow x=2$. **2p**
2.	$3^{x+1}+3^x=12\Leftrightarrow 3^x(3+1)=12$. **3p** $3^x=3\Rightarrow x=1$. **2p**
3.	$f(2)=2+a\Rightarrow f(f(2))=2+a+a$. **3p** $2+2a=4\Rightarrow a=2$. **2p**
4.	Numărul submulțimilor ordonate este $A_5^2=\frac{5!}{3!}=20$. **5p**
5.	Punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 este $B(1,1)$. **3p** $AB=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$. **2p**
6.	$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}$. **3p** $\cos A=\frac{1}{8}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$I_2+A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\4&3\end{pmatrix}$. **5p**
1. b)	$B=\begin{pmatrix}3&1\\4&3\end{pmatrix}$, $\det B\neq 0$. **2p** $\det B=5\neq 0\Rightarrow B$ este inversabilă $\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3&-1\\-4&3\end{pmatrix}$. **3p**
1. c)	Fie $x=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $a,b,c,d\in\mathbf{R}$. Cum $\det x^2=(\det x)^2=\det A=0$, avem condiția $ad=bc$. Obținem din identificare $x_1=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$ și $x_2=\begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}\\-2&-1\end{pmatrix}$. **5p**
2. a)	Prin calcul direct. **5p**
2. b)	Ținând cont de a) avem $2(\log_2 x-3)\left(\log_{\frac{1}{2}}x-3\right)+3=-1$ **12p** $\Rightarrow\log_2^2 x=16$ **1p** $\Rightarrow$ $\Rightarrow x\in\{2^{-4},2^4\}$. **2p**
2. c)	Prin inducție se arată că $\underbrace{x*x*x*\ldots*x}_{\text{de } n \text{ ori}}=2^{n-1}(x-3)^n+3$, **3p** obținem $n=10$. **2p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=e^x+1$. **3p** $e^x+1>0\Rightarrow f$ crescătoare pe $\mathbf{R}$. **2p**
1. b)	$f''(x)=e^x$. **3p** $e^x>0,(\forall)x\in\mathbf{R}\Rightarrow f$ convexă pe $\mathbf{R}$. **2p**
1. c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x+3}=$ **2p** $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}}=1$. **3p**
2. a)	$\int_1^e\left(f(x)-\frac{1}{x+2}\right)dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx=$ **3p** $=\ln x\,|_1^e=\ln e-\ln 1=1$. **2p**
2. b)	$\mathcal{A}=\left\|\int_1^2 f(x)dx\right\|=\ln(x^2+2x)\Big\|_1^2=$ **3p** $=\ln 8-\ln 3=\ln\frac{8}{3}$. **2p**
2. c)	$V=\pi\cdot\int_1^2\left(\frac{1}{x+2}\right)^2dx=$ **2p** $=\pi\cdot\left.\frac{(x+2)^{-1}}{-1}\right|_1^2=\pi\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{12}$. **3p**

TESTUL 9

Subiectul I.

1.	$A_3^1 = 3,\ \log_2 16 = 4,\ C_5^1 = 5$. **3p** $4 = \frac{3+5}{2} \Leftrightarrow A_3^1,\ \log_2 16,\ C_5^1$ sunt în progresie aritmetică. **2p**
2.	$\sqrt{x^2+64} = 10 \Leftrightarrow x^2+64 = 100 \Leftrightarrow$ **3p** $x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$. **2p**
3.	Numărul submulțimilor cu trei elemente este $C_5^3 =$ **3p** $= \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$. **2p**
4.	$x_1 + x_2 = m+5,\ x_1 \cdot x_2 = 6$. **3p** $m+5 = 18 \Leftrightarrow m = 13$. **2p**
5.	$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$. **2p** $d_1 \perp d_3 \Leftrightarrow 2 \cdot b + 1 \cdot (-6) = 0 \Leftrightarrow b = 3$. **3p**
6.	$\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$. **3p** $\sin 75^\circ - \cos 15^\circ = 0$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **2p** $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \cdot A$. **3p**
1. b)	$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **2p** $B^3 = B^2 \cdot B = O_3$. **3p**
1. c)	Cum $A = B + I_3$, avem $A^{2018} = (B+I_3)^{2018} = I_3 + 2018 + B + \frac{2017 \cdot 2018}{2} B^2$. **3p** Obținem $A^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 2018 & 3 \cdot 2018 + \frac{2017 \cdot 2018}{2} \\ 0 & 1 & 2018 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1008 \cdot 2023$. **2p**
2. a)	$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + 6 = 0 \\ 9a - 3b + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ **3p** $a = 1$ și $b = 5$. **2p**
2. b)	Restul împărțirii polinomului f la $x-1$ este $f(1)$. **3p** $f(1) = 2$ pentru $a = 1$ și $b = 5$. **2p**
2. c)	$x_1 + x_2 = 5,\ x_1 \cdot x_2 = 6,\ x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 13$. **2p** $\begin{cases} x_1^3 - 5x_1^2 + 6x_1 = 0 \\ x_2^3 - 5x_2^2 + 6x_2 = 0 \end{cases} \cdot\ x_1^3 + x_2^3 - 5(x_1^2 + x_2^2) + 6(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = 35$. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = \frac{(x+2)^1 \cdot (x-2) - (x+2) \cdot (x-2)^1}{(x-2)^2} =$ **3p** $= \frac{-4}{(x-2)^2}$. **2p**
1. b)	$\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = f'(4) =$ **3p** $= -1$. **2p**
1. c)	$f(4) = 3$ și ecuația tangentei la graficul funcției în $x = 3$ este $y - 3 = f'(4)(x-4) \Leftrightarrow$ **3p** $\Leftrightarrow y - 3 = -(x-4) \Leftrightarrow y + x - 7 = 0$ **2p**
2. a)	F derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $F'(x) = f(x), (\forall) x \in \mathbf{R}$. **2p** $F'(x) = (x-1)^1 \cdot e^x + (x-1) \cdot (e^x)^1 = x \cdot e^x = f_1(x)$. **3p**
2. b)	$\int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 e^x dx =$ **2p** $= e^x \mid_0^1 = e - 1$. **3p**
2. c)	$A = \int_0^1 x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x \mid_0^1 - 2(x \cdot e^x \mid_0^1 - e^x \mid_0^1) =$ **2p** $= e - 2$. **3p**

TESTUL 10

Subiectul I.

1.	$C_4^3 = 4$, $A_4^2 = 12$, $P_4 = 24$. **3p** $C_4^3 + A_4^2 - P_4 = -8$. **2p**
2.	$f(3) = f(4) = 0 \Rightarrow$ **3p** $f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(2017) = 0$. **2p**
3.	Notând $x_1 + x_2 = s$ și $x_1 \cdot x_2 = p$, ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile x_1 și x_2 este $x^2 - sx + p = 0$. **3p** $x^2 - 5x + 6 = 0$. **2p**
4.	$\log_2 3 + \log_2 100 - \log_2 25 = \log_2 \frac{3 \cdot 100}{25} =$ **3p** $= \log_2 3 \cdot 4 = \log_2 3 + \log_2 4 = a + 2$. **2p**
5.	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ **2p** $\Rightarrow \cos 2x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$. **3p**
6.	Aplicând teorema sinusurilor obținem $\frac{BC}{\sin A} = 2R$. **2p** $R = 4$. **3p**

Subiectul II.

1. a)	Ecuația dreptei AB este:	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$= 0 \Leftrightarrow$ **2p** $3x - y - 3 = 0$. **3p**
1. b)	$\mathcal{A} = \frac{\lvert D \rvert}{2}$ unde $D =$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$=$ **2p** $= -1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. **3p**
1. c)	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$= 0 \Leftrightarrow$ **2p** $3a = 4 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$. **3p**	
2. a)	$\overline{e} \in G$ este element neutru dacă $(\forall) x \in G$. $\overline{e} * x = x * \overline{e} = x$. **2p** Avem $3 + (x-3)^{\ln(\overline{e}-3)} = x, (\forall) x \in \mathbf{R}$ **1p** $\Rightarrow \overline{e} = e + 3 \in G$. **2p**		
2. b)			
2. c)	$x = \overline{e}$ soluție unică. **2p**		

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (4x-2) = 2$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (\ln x + 2) = 2, f(2) = 2$. **3p** $\Rightarrow f$ continuă în $x_0 = 1 \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbf{R}$. **2p**
1. b)	$\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2)$. **3p** $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{1}{2}$. **2p**
1. c)	$f(-1) = -6, f(0) = 4, f(1) = 2 \Rightarrow$ **3p** $f(-1) + f(0) + f(1) = 0$. **2p**
2. a)	$F'(x) = \left(\ln x + \frac{x^2}{2}\right)' =$ **2p** $\frac{1}{x} + x = f(x)$. Cum F este derivabilă rezultă că F este primitivă a lui f. **3p**
2. b)	$\int_1^e f(x)dx = F(x)\Big\rvert_1^e = \left(\ln x + \frac{x^2}{2}\right)\Big\rvert_1^e =$ **3p** $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$. **2p**
2. c)	$C_x = \pi \int_1^3 f^2(x)dx = \pi\left(\int_1^3 \frac{1}{x^2} + 1 + x^2\right)dx = \frac{34\pi}{3}$. **5p**

TESTUL 11

Subiectul I.

1.	$S_n = 145.\ r = 3 \Rightarrow x = a_n = a_1 + (n-1)\cdot r = 3n-2.\ S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} = \frac{3n^2-n}{2} =$ $= 145 \Rightarrow 3n^2 - n - 290 = 0.\ n_1 = -\frac{29}{3} \notin \mathbf{N}$ și $n_2 = 10 \Rightarrow x = 28.$ **5p**
2.	$x_{\min} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{-(3m-1)}{2m^2} = 1 \Rightarrow 2m^2 - 3m + 1 = 0.\ m_1 = 1$ sau $m_2 = \frac{1}{2}.$ **5p**
3.	Condiții: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \in [1;\infty),\ x-4 \geq 0 \Rightarrow x \in [4;\infty) \Rightarrow x \in [4;\infty).$ $(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4})^2 = 3^2 \Rightarrow \sqrt{(x-1)(x-4)} = 7-x.\ 7-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 7 \Rightarrow x \in [4;7].$ $\left(\sqrt{(x-1)(x-4)}\right)^2 = (7-x)^2 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 49 - 14x + x^2 \Rightarrow 9x = 45 \Rightarrow x = 5 \in [4;7].$ **5p**
4.	$\overline{abc} \vdots 5 \Rightarrow c \in \{0;5\}$. Dacă $c = 0$ atunci $\overline{ab0}$ cu $a \neq b$ sunt A_5^2 posibilități. Dacă $c = 5$ atunci $\overline{abc}$ sunt: $A_5^2 - A_4^1$ posibilități. $A_5^2 = 20;\ A_4^1 = 4.$ Deci sunt: $20 + 20 - 4 = 36$ de numere. **5p**
5.	$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1.\ d \perp AB \Rightarrow m_d \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = -1.$ Ecuația lui d: $y - y_c = m_d \cdot (x - x_c) \Rightarrow x + y - 2 = 0.$ **5p**
6.	$\sin a = \frac{12}{13}.\ \cos b = -\frac{4}{5}.\ \mathrm{tg}a = \frac{12}{5};\ \mathrm{tg}b = -\frac{3}{4}.\ \mathrm{tg}(a+b) = \frac{\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b}{1 - \mathrm{tg}a \cdot \mathrm{tg}b} = \frac{33}{56}.$ **5p**

Subiectul II.

1. a)	$A - xI_2 = \begin{pmatrix} 2-x & 6 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix}.\ \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 2-x & 6 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5.$ **5p**
1. b)	$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} = 5 \cdot A.$ Demonstrăm prin inducție că $A^n = 5^{n-1} \cdot A, (\forall) n \geq 1.$ **5p**
1. c)	$B^n = (I_2 + A)^n = I_2 + (C_n^1 + C_n^2 \cdot 5 + \ldots + C_n^n \cdot 5^{n-1}) \cdot A.$ Fie $S = C_n^1 + C_n^2 \cdot 5 + \ldots + C_n^n \cdot 5^{n-1} \Rightarrow 5 \cdot S = 6^n - 1 \Rightarrow S = \frac{6^n - 1}{5}.$ Deci $B^n = I_2 + \frac{6^n - 1}{5} \cdot A.$ **5p**
2. a)	$f \vdots X - 1 \Leftrightarrow f(1) = 0. f(1) = 1 - 2 + m + 1 - 2m - 1 = -m - 1 = 0 \Rightarrow m = -1.$
2. b)	$m = -1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ și $f = (X-1) \cdot q$ unde $q = X^2 - X - 1 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$ **5p**
2. c)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0,\ (1).$ $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \Rightarrow x_1^2 \geq 0, x_2^2 \geq 0, x_3^2 \geq 0,\ (2).$ Din (1), (2) $\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0.$ $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 3 \Leftrightarrow 0 = 3.$ Contradicție $\Rightarrow$ presupunerea este falsă. **5p**

Subiectul III.

1. a)	Studiem continuitatea în 0. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\le 0}} (x\cdot e^{-x}) = 0$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x\cdot e^{x}) = 0. f(0) = 0$. Deci f este continuă în $x_0 = 0$. Calculăm derivata pe $\mathbf{R}\setminus\{0\}. f'(x) = \begin{cases} e^{-x} - xe^{-x}, x<0 \\ e^{x} + xe^{x}, x>0 \end{cases}$. $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = 1. f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 1.$ $f'_s(0) = f'_d(0) = 1 \Rightarrow f$ este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 1$. **5p**
1. b)	$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(1-x), x<0 \\ e^{x}(1+x), x\ge 0 \end{cases}$. $f'(x) \Rightarrow 0, (\forall) x\in\mathbf{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare $\Rightarrow f$ este Injectivă. f continuă și $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow f(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \Rightarrow f$ este surjectivă $\Rightarrow f$ este bijectivă $\Rightarrow f$ este inversabilă. $(f^{-1})'(e) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$; unde $f(x_0) = e$. Observăm că $f(1) = e \Rightarrow (f^{-1})'(e) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2e}$. **5p**
1. c)	$\ln 2 < 1 < \sqrt{3}$ și f strict crescătoare $\Rightarrow f(\ln 2) < f(\sqrt{3}) \Rightarrow \ln 2\cdot e^{\ln 2} < \sqrt{3}\cdot e^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln 2\cdot 2 < \sqrt{3}\cdot e^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \ln 2^2 < \sqrt{3}\cdot e^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \ln 4 < \sqrt{3}\cdot e^{\sqrt{3}}$.
2. a)	$f'(x) = e^{(x^2)^3}\cdot (x^2)' = 2x\cdot e^{x^6} = 0 \Rightarrow x = 0$. Pentru $x\ge 0$, f este strict crescătoare, iar pentru $x\le 0$, f este strict descrescătoare. **5p**
2. b)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - x^2}{x^8} = \dfrac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2xe^{x^6} - 2x}{8x^7} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot(e^{x^6} - 1)}{8x^7} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^6} - 1}{4x^6} = \dfrac{1}{4}$. **5p**
2. c)	$f(1) = \int_0^1 e^{t^3} dt$. $e^{t^3} \ge t^3 + 1 \Rightarrow \int_0^1 e^{t^3} dt \ge \int_0^1 (t^3 + 1) dt \Rightarrow f(1) \ge \left.\dfrac{t^4}{4}\right|_0^1 + \left. t\right|_0^1 = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$. **5p**

TESTUL 12

Subiectul I.

1.	$\begin{cases} b_1+b_1\cdot q+b_1\cdot q^2=26 \\ b_1\cdot q^3-b_1=52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=26 \\ b_1(q-1)(q^2+q+1)=52 \end{cases} \Rightarrow q-1=2 \Rightarrow$ $\Rightarrow q=3 \Rightarrow b_1\cdot 13=26 \Rightarrow b_1=2$. **5p**
2.	$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2$. Dar $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-4=0$. Deci $x_1^4+x_2^4=-8$. **5p**
3.	$2^{2x}\cdot 2-3\cdot 2^x+1=0$. Notăm $2^x=t \Rightarrow 2t^2-3t+1=0 \Rightarrow t_1=\frac{1}{2}$ și $t_2=1$. $2^x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=-1$. $t=1 \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow x=0$. **5p**
4.	$30-18=12$ băieți sunt în clasă. C_{12}^3 = numărul posibilităților de a alege 3 băieți. C_{18}^2 = numărul posibilităților de a alege 2 fete. $C_{12}^3\cdot C_{18}^2$ = numărul comitetelor care se pot forma. **5p**
5.	G este centrul de greutate $\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul lui $[BC]$. Dar $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. Deci $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. **5p**
6.	Din teorema cosinusului: $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A=\sqrt{13}$. $\mathcal{P}_{ABC}=AB+AC+BC=5+\sqrt{13}$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$\Delta(2)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=8+8+8-64-1-8=-49$. **5p**
1. b)	$\Delta(x)=\begin{vmatrix} 1+x+x^2 & x & x^2 \\ x+x^2+1 & x^2 & 1 \\ x^2+1+x & 1 & x \end{vmatrix}=(1+x+x^2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=(1+x+x^2)\cdot$ $\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & x^2-x & 1-x^2 \\ 0 & 1-x & x-x^2 \end{vmatrix}=(1+x+x^2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & x(x-1) & (1-x)(1+x) \\ 0 & 1-x & x(1-x) \end{vmatrix}=$ $=(1+x+x^2)(x-1)^2\cdot(-x^2-x-1)=-(x^2+x+1)^2(x-1)^2$. **5p**
1. c)	$\Delta(3^x)=0 \Rightarrow -(3^{2x}+3^x+1)^2(3^x-1)^2=0$. $3^{2x}+3^x+1=0$ nu are soluții. $3^x-1=0 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0$. **5p**
2. a)	Fie $x,y\in H \Rightarrow x>2$ și $y>2 \Rightarrow (x-2)(y-2)>0 \Rightarrow xy-2x-2y+4>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x\circ y>2 \Rightarrow x\circ y\in H$, (1). Fie e elementul neutru al legii de compoziție $\Rightarrow x-e=x,(\forall)x\in\mathbf{R} \Rightarrow$ $\Rightarrow xe-2x-2e+6-x=0 \Rightarrow (e-3)(x-2)=0 \Rightarrow e=3\in H,(\forall)x\in H,(\exists)x'\in H,$ astfel încât $x\circ x'=e \Rightarrow xx'-2x-2x'+6=3 \Rightarrow xx'-2x'=2x-3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x'(x-2)=2x-4+1$. Cum $x\neq 2 \Rightarrow x'=2+\frac{1}{x-2}>2,(\forall)x>2 \Rightarrow x'\in H$, (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow H$ este subgrup al grupului $(\mathbf{R}\setminus\{2\},\circ)$. **5p**
2. b)	$f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y),(\forall)x,y\in H \Leftrightarrow f(xy-2x-2y+6)=(x-2)\cdot(y-2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow xy-2x-2y+6-2=xy-2x-2y+4 \Leftrightarrow xy-2x-2y+4=xy-2x-2y+$ $+4 \Rightarrow f$ este morfism de grupuri, (1). Fie $x_1,x_2\in(2,\infty)$, astfel încât $f(x_1)=$ $=f(x_2) \Rightarrow x_1-2=x_2-2 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow f$ este injectivă, (2).

	Fie $y \in \mathbf{R}_+^*$, astfel încât $f(x) = y \Rightarrow x - 2 = y \Rightarrow x = y + 2$. Deoarece $y > 0 \Rightarrow x \in (2, \infty) \Rightarrow f$ este surjectivă, (3). Din (2), (3) $\Rightarrow f$ este bijectivă, (4). Din (1), (4) $\Rightarrow f$ este izomorfism de grupuri. **5p**
2. c)	Fie $A = \frac{5}{2} \circ \frac{8}{3} \circ \frac{11}{4} \circ \ldots \circ \frac{299}{100}$. $f(A) = f\left(\frac{5}{2} \circ \frac{8}{3} \circ \frac{11}{4} \circ \ldots \circ \frac{299}{100}\right) =$ $= f\left(\frac{5}{2}\right) \cdot f\left(\frac{8}{3}\right) \cdot f\left(\frac{11}{4}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{299}{100}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} = \frac{1}{100} \Rightarrow$ $\Rightarrow A - 2 = \frac{1}{100} \Rightarrow A = \frac{201}{100}$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta. Nu are asimptote oblice. **5p**
1. b)	$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$. $f''(x) = \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^3 - 3x^2(1 - 2\ln x)}{x^6} = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$. $f''(x) = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{5}{6} \Rightarrow x = e^{\frac{5}{6}}$. Pentru $x \in \left(0, e^{\frac{5}{6}}\right)$, f este concavă, iar pentru $x \in \left(e^{\frac{5}{6}}, \infty\right)$, f este convexă. **5p**
1. c)	f este convexă pe $\left(e^{\frac{5}{6}}, \infty\right) \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, (\forall) x, y \in \left(e^{\frac{5}{6}}, \infty\right)$. $x = 4$ și $y = 6 \Rightarrow f(5) \leq \frac{f(4) + f(6)}{2} \Rightarrow \frac{\ln 25}{25} \leq \frac{\ln 4}{16} + \frac{\ln 6}{36}$. **5p**
2. a)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 2x + 2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx =$ $= \frac{1}{2} \cdot \ln(5) - \frac{1}{2} \ln 2 - \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} - \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{4}$. **5p**
2. b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2 + 2x + 2} dx \leq 0$, deoarece $x \in [0, 1] \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow (I_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.
2. c)	$I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{n+1}$. $(I_n)_{n \geq 1}$, descrescător $\Rightarrow I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow$ $\Rightarrow I_n + 2I_n + 2I_n \geq \frac{1}{n+1} \Rightarrow 5I_n \geq \frac{1}{n+1} \Rightarrow nI_n \geq \frac{n}{5(n+1)}$. $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow$ $\Rightarrow I_{n+2} + 2I_{n+2} + 2I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} 5I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow 5I_n \leq \frac{1}{n-1} \Rightarrow nI_n \leq \frac{n}{5(n-1)}$. Deci: $\frac{n}{5(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{5(n-1)} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} nI_n = \frac{1}{5}$. **5p**

TESTUL 13

Subiectul I.

1.	$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(2x+1)^2+2x+1=4x^2+6x+2\geq 0\Leftrightarrow 2x^2+3x+1\geq 0.$ $x\in(-\infty;-1]\cup\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$. **5p**
2.	$2x-3=\frac{x+x^2-x}{2}\Rightarrow x^2-4x+3=0.\ \Delta=16-12=4\Rightarrow x_1=1;\ x_2=3.$ **5p**
3.	Notăm $\lg x=t\Rightarrow t^2-5t+4=0\Rightarrow t_1=1;\ t_2=4.\ \lg x=1\Rightarrow x=10.\ \lg x=4\Rightarrow x=10^4.$ **5p**
4.	$P=\frac{\text{Numărul cazurilor favorabile}}{\text{Numărul cazurilor posibile}}=\frac{A_4^3}{4^3}=\frac{\frac{4!}{1!}}{64}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}.$ **5p**
5.	$m\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\in(90^\circ;180^\circ)\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}<0\Leftrightarrow(m-1)\cdot m+m\cdot 2<0\Leftrightarrow m^2+m<0.\ m\in(-1;0).$
6.	$\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=3.$ **5p**

Subiectul II.

1. a)	$A_1(1;3)$ și $A_2(7;6).\ x-2y+5=0.$ **5p**
1. b)	$\mathcal{A}_{OA_1A_2}=\frac{15}{2}.$ **5p**
1. c)	$\mathcal{A}_{OA_1A_m}=\frac{\lvert-6m^2+3m+3\rvert}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow 3\cdot\lvert-2m^2+m+1\rvert=3\Rightarrow\lvert-2m^2+m+1\rvert=1.$ I. $-2m^2+m+1=1\Rightarrow -2m^2+m=0\Rightarrow m(-2m+1)=0\Rightarrow m=0$ sau $m=\frac{1}{2}$ nu convin. II. $-2m^2+m+1=-1\Rightarrow -2m^2+m+2=0\Rightarrow m_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$ nu convin. **5p**
2. a)	$f(1-i)=0\Rightarrow(1-i)^4-6(1-i)^3+12(1-i)^2+(3m-1)(1-i)-n=0\Rightarrow$ $\Rightarrow 3m-n+7-i(3m+11)=0\Rightarrow 3m+11=0\Rightarrow m=-\frac{11}{3}$ și $3m-n+7=0\Rightarrow n=-4.$ **5p**
2. b)	Fie $a<2$ rădăcină triplă $\Rightarrow f(a)=f'(a)=f''(a)=0.$ $f''(x)=12x^2-36x+24\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a_1=1;\ a_2=2.$ Dar $a<2\Rightarrow x_1=x_2=x_3=1.\ f'(1)=3m+9=0\Rightarrow m=-3.\ f(1)=-3-n=0\Rightarrow n=-3.$ **5p**
2. c)	$n=m=1\Rightarrow f=X^4-6X^3+12X^2+2X-1.\ f(x_i)=0\Rightarrow x_i^4-6x_i^3+12x_i^2+2x_i-1=$ $=0\Rightarrow x_i^3=6x_i^2-12x_i-2+\frac{1}{x_i};\ i\in\{1,2,3,4\}\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=-6.$ **5p**

Subiectul III.

1. a)	Fie d_2 dreapta cerută, iar tangenta la grafic o notăm cu d_1. $m_{d_1}=f'(1).\ f'(x)=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{e^x\cdot x}{(x+1)^2}\Rightarrow m_{d_1}=\frac{e}{4}.$ $d_2\parallel d_1\Rightarrow m_{d_2}=m_{d_1}\Rightarrow m_{d_2}=\frac{e}{4}$; Ecuația lui d_2: $y-2=\frac{e}{4}\cdot(x-1).$ **5p**
1. b)	$f'(x)=0\Rightarrow e^x\cdot x=0\Rightarrow x=0$, punct de minim. **5p**
1. c)	**5p**
2. a)	$I_1=\int_0^1 x\cdot\sin 2x\,dx=-\frac{x\cdot\cos 2x}{2}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\cos 2x\,dx=-\frac{\cos 2}{2}+\frac{\sin 2}{4}.$ **5p**
2. b)	$I_n=\int_0^1 x^n\cdot\sin 2x\,dx=\frac{-x^n\cdot\cos 2x}{2}\Big|_0^1+\frac{n}{2}\int_0^1 x^{n-1}\cdot\cos 2x\,dx=-\frac{\cos 2}{2}+\frac{n}{2}\cdot$ $\cdot\left(\frac{x^{n-1}\cdot\sin 2x}{2}\Big|_0^1-\frac{n-1}{2}\cdot\int_0^1 x^{n-2}\cdot\sin 2x\,dx\right)=-\frac{\cos 2}{2}+\frac{n\sin 2}{4}-\frac{n(n-1)}{4}\cdot I_{n-2}.$ **5p**

TESTUL 14

Subiectul I.

1.	$2\cdot(2x+1)+3\cdot(-2x+1)=2\Leftrightarrow -2x+5=2\Leftrightarrow -2x=-3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. **5p**
2.	$\Delta=0\Rightarrow(-m)^2-4\cdot1\cdot(-m-1)=0\Leftrightarrow m^2+4m+4=0\Leftrightarrow(m+2)^2=0\Leftrightarrow m=-2$. **5p**
3.	Fie x = prețul Inițial. $x+\frac{10}{100}\cdot x=1100\Leftrightarrow x=1000$ de lei prețul inițial. **5p**
4.	$T_{k+1}=C_n^k\cdot a^{n-k}\cdot b^k\Rightarrow T_5=T_{4+1}=C_{10}^4\cdot x^{10-4}\cdot(-1)^4=C_{10}^4\cdot x^6$. **5p**
5.	$\vec{u}\parallel\vec{v}\Leftrightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\Leftrightarrow\frac{m+2}{2m-1}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 6m-3=2m+4\Leftrightarrow 4m=7\Leftrightarrow m=\frac{7}{4}$. **5p**
6.	$\mathcal{A}_{MNP}=\frac{MN\cdot MP\cdot\sin M}{2}=\frac{2\cdot3\cdot\sin120^\circ}{2}=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{vmatrix}=4-4=0$. **5p**
1. b)	$A^2=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&1&0\\8&0&8\end{pmatrix}$. $A^2-A+I_3=\begin{pmatrix}7&0&6\\0&1&0\\6&0&7\end{pmatrix}$. **5p**
1. c)	$A^3=\begin{pmatrix}2^5&0&2^5\\0&1&0\\2^5&0&2^5\end{pmatrix}$. Demonstrăm prin inducție că $A^n=\begin{pmatrix}2^{2n-1}&0&2^{2n-1}\\0&1&0\\2^{2n-1}&0&2^{2n-1}\end{pmatrix}$. **5p**
2. a)	$m=1\Rightarrow f=X^3-X^2-3X+2$. $r=f(-1)=3$. **5p**
2. b)	$f\vdots X-1\overset{T.Bezout}{\Rightarrow}f(1)=0\Leftrightarrow 1^3-m\cdot1^2-3\cdot1+2=0\Leftrightarrow m=0$. **5p**
2. c)	$m=0\Rightarrow f\vdots X-1\Rightarrow x_1=1\Rightarrow f=(X-1)(X^2-X-2)\Rightarrow x_2=1,\ x_3=-2$. $x_1^3+x_2^3+x_3^3=1^3+1^3+(-2)^3=-6$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$. **5p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=2\Rightarrow y=2$ asimptotă orizontală către $\pm\infty$. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{2x+1}{x-1}=\frac{3}{-0}=-\infty$. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\frac{3}{+0}=+\infty$. Deci $x=1$ este asimptotă verticală. Nu are asimptote oblice. **5p**
1. c)	$f'(x)<0,(\forall)x\in\mathbf{R}\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $\mathbf{R}\Rightarrow f(\sqrt[3]{2})>f(\sqrt[3]{3})$. **5p**
2. a)	$\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}\cdot(x^2+1)dx=\int_0^1x^2dx=\frac{x^3}{x}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$. **5p**
2. b)	F este o primitivă a lui f_3 dacă F este derivabilă și $F'=f_3$. $F'(x)=\left(\frac{x^2}{2}\right)^1-\left[\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1)\right]^1=\frac{1}{2}\cdot2x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)^1=\frac{x^3}{x^2+1}=f_3(x)$. **5p**
2. c)	Deoarece $f_2(x)=\frac{x^2}{x^2+1}\geq0,(\forall)x\in[0;1]\Rightarrow\mathcal{A}=\int_0^1f_2(x)dx=\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx=\frac{4-\pi}{4}$. **5p**

TESTUL 15

Subiectul I.

1.	Fie $S=2+5+8+\ldots+59$. Termenii sumei sunt în progresie aritmetică de rație 3. $a_n=a_1+(n-1)\cdot r \Rightarrow a_n=3n-1 \Rightarrow n=20 \Rightarrow S=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=610$. **5p**
2.	$Gf\cap 0x \Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow x_1=-3$ și $x_2=-1 \Rightarrow A(-3,0);\ B(-1,0).\ AB=2$. **5p**
3.	$2x>1 \Rightarrow x>\frac{1}{2} \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2};\infty\right).\ 2x-1=3^3 \Rightarrow x=14\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$. **5p**
4.	$z_1+z_2=1-i+2+2i=3+i.\ \lvert z_1+z_2\rvert=\lvert 3+i\rvert=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. **5p**
5.	$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\cdot\vec{i}+(y_B-y_A)\cdot\vec{j}=(3-1)\cdot\vec{i}+(5-2)\cdot\vec{j}=2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}$. **5p**
6.	$\cos^2 x=\frac{8}{9} \Rightarrow \cos x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\ x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \Rightarrow \cos x<0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & m\\ m & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$. $\det A=9-4+m+6m=7m+5$. **5p**
1. b)	$m=1 \Rightarrow \det A=12\neq 0$. Aplicăm regula lui *Cramer*. $x=\frac{\Delta_1}{\det A}=1;\ y=\frac{\Delta_2}{\det A}=2;\ z=\frac{\Delta_3}{\det A}=-1.\ S=\{(1;2;-1)\}$. **5p**
1. c)	Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow \det A\neq 0 \Leftrightarrow 7m+5\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -\frac{5}{7} \Leftrightarrow m\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{5}{7}\right\}$. **5p**
2. a)	$x\circ x^2=0 \Leftrightarrow x+x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0.\ x_1=-2;\ x_2=1$. **5p**
2. b)	$(\exists)e\in\mathbf{R}$, astfel încât $x\circ e=e\circ x=x, (\forall)x\in\mathbf{R}.\ x\circ e=x \Leftrightarrow x+e-2=x \Leftrightarrow e=2\in\mathbf{R}$. **5p**
2. c)	$1\circ 2=1+2-2=1.\ 1\circ 2\circ 3=(1\circ 2)\circ 3=1\circ 3=1+3-2=2=1+1.$ $1\circ 2\circ 3\circ 4=(1\circ 2\circ 3)\circ 4=2\circ 4=2+4-2=4=1+1+2.$ $1\circ 2\circ 3\circ 4\circ 5=(1\circ 2\circ 3\circ 4)\circ 5=4\circ 5=4+5-2=7=1+1+2+3.$ Vom demonstra prin inducție că: $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ n=1+(1+2+\ldots+n-2)=1+\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}=\frac{n^2-3n+4}{2},(\forall)n\in\mathbf{N}^*.$ $n=100 \Rightarrow 1\circ 2\circ\ldots\circ 100=\frac{100^2-300+4}{2}=4852$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=1+\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)^1=1+\frac{1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1},(\forall)x>-1$. **5p**
1. b)	$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=2x$. **5p**
1. c)	$f''(x)=\frac{x+1-(x+2)}{(x+1)^2}=-\frac{1}{(x+1)^2}<0 \Rightarrow f$ este concavă. **5p**
2. a)	$\int e^x\cdot\frac{x}{e^x}dx=\int x dx=\frac{x^2}{2}+\mathscr{C}$. **5p**
2. b)	$\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx=-x\cdot e^{-x}\Big\rvert_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-\frac{1}{e}-e^{-x}\Big\rvert_0^1=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=\frac{e-2}{e}$. **5p**
2. c)	$e^x\geq x+1 \Rightarrow \frac{1}{e^x}\leq\frac{1}{x+1}\Big\rvert\cdot x \Rightarrow \frac{x}{e^x}\leq\frac{x}{x+1} \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx\leq\int_1^2\frac{x}{x+1}dx=1-\ln\frac{3}{2}$. **5p**

TESTUL 16

Subiectul I.

1.	G_f este tangent axei $Ox \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 4-4m=0 \Rightarrow m=1$. **5p**
2.	$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=4.\{-1;4\}\cap \mathbf{N}=\{4\}$. **5p**
3.	$2^{x^2+3x}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x}=2^{-2} \Leftrightarrow x^2+3x=-2 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=-1$. **5p**
4.	$P=\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}=\frac{3+4}{3+4+5}=\frac{7}{12}$. **5p**
5.	$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2=0 \Leftrightarrow 2\cdot 3+(m-1)\cdot(-5)=0 \Leftrightarrow m=\frac{11}{5}$. **5p**
6.	$\sin 65^\circ=\cos(90^\circ-65^\circ)=\cos 25^\circ.\ \sin^2 25^\circ+\sin^2 65^\circ=\sin^2 25^\circ+\cos^2 25^\circ=1$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$m=2 \Rightarrow \det A=$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-1+4+4-4=3$. **5p**
1. b)	A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$. $\det A=m^2-1 \Rightarrow m\in\mathbf{R}\setminus\{\pm 1\}$. **5p**	
1. c)	$m=-2 \Rightarrow \det A=3 \Rightarrow A$ este inversabilă. $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. **5p**	
2. a)	$x*y=(x+2)(y+2)-2 \Leftrightarrow xy+2x+2y+2=xy+2x+2y+2$. **5p**	
2. b)	$x*a=a \Leftrightarrow (x+2)(a+2)-2=a \Leftrightarrow (a+2)(x+1)=0,(\forall)x\in\mathbf{R} \Rightarrow a+2=0 \Leftrightarrow a=-2$. **5p**	
2. c)	Calculăm $x\circ(-\sqrt{4})\circ y=x\circ(-2)\circ y$. Atunci: $x\circ(-2)\circ y=(x+2)(-2+2)(y+2)-2=-2$.	

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=xe^x(x+2)$. **5p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2\cdot e^x-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3\cdot e$. **5p**
1. c)	$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ sau $x=-2$. $f(0)=0;\ f(-2)=\frac{4}{e^2}$. $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -2 & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & + & + & 0 & - & 0 & + & + \\ \hline f(x) & \nearrow & & \frac{4}{e^2} & \searrow & 0 & \nearrow & \end{array} \Rightarrow$ $\Rightarrow x=-2$ punct de maxim local. $x=0$ punct de minim local. **5p**
2. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x+\ln x)=1$. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x^2-3x+3)=1$. $f(1)=1$. Deci f este continuă $\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbf{R}$. **5p**
2. b)	$\int_2^e f(x)dx=\int_2^e(x+\ln x)dx=\int_2^e x\,dx+\int_2^e \ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\|_2^e+x\ln x\Big\|_2^e-\int_2^e x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-2\ln 2$. **5p**
2. c)	$x\in[0,1] \Rightarrow f(x)\geq 0 \Rightarrow \mathcal{A}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^2-3x+3)dx=$ $=\int_0^1 x^2dx-3\int_0^1 x\,dx+3\int_0^1 dx=\frac{x^3}{3}\Big\|_0^1-\frac{3x^2}{2}\Big\|_0^1+3x\Big\|_0^1=\frac{11}{6}$. **5p**

TESTUL 17

Subiectul I.

1.	$b_1 = 1;\ q = 3;\ n = 100 \Rightarrow S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{100} = \frac{3^{100} - 1}{2}$. **5p**
2.	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \Delta > 0.\ m^2 - 6m + 5 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \cup (5, \infty)$. **5p**
3.	$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7!} = 120.\ A_9^2 = \frac{9!}{7!} = 8 \cdot 9 = 72.\ C_{10}^3 + A_9^2 = 120 + 72 = 192$. **5p**
4.	$100 + \frac{10}{100} \cdot 100 = 100 + 10 = 110$ lei prețul după prima scumpire. $110 + \frac{5}{100} \cdot 110 = 110 + 5,5 = 115,50$ lei prețul după a doua scumpire. **5p**
5.	$MN: -2x + 3y - 7 = 0$. **5p**
6.	$\sin(180° - x) = \sin x.\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. $x \in (90°; 180°) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin(180° - x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 7 = -1$. **5p**
1. b)	$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 35 & 16 \end{pmatrix}.\ A^2 - 5A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$. **5p**
1. c)	$A^2 - 5A - I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 - 5A = I_2 \Rightarrow A \cdot (A - 5I_2) = I_2 \Rightarrow A \cdot B = I_2 \Rightarrow B^{-1} = A$. **5p**
2. a)	$q = X + 3;\ r = -3X - 9$. **5p**
2. b)	$g(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0.\ \Delta = 1 - 4 = -3 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{2}$. **5p**
2. c)	$f = g \cdot q + r \Rightarrow f(x_1) = g(x_1) \cdot q(x_1) + r(x_1)$. Dar $g(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = r(x_1) = -3x_1 - 9$. Analog, $f(x_2) = -3x_2 - 9$. Deci $f(x_1) + f(x_2) = -3(x_1 + x_2) - 18 = -15$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$. **5p**
1. b)	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x+1} = \pm\infty \Rightarrow$ graficul lui f nu are asimptote orizontale. $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow m = 1 \in \mathbf{R}^*.\ n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) =$ $= \lim\limits_{x \to \pm\infty} -\frac{x}{x+1} = -1 \Rightarrow n = -1 \in \mathbf{R}.\ y = mx + n \Rightarrow y = x - 1$ este ecuația asimptotei oblice la graficul lui f spre $\pm\infty$. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{-0} = -\infty$. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{+0} = +\infty$. Deci $x = -1$ este asimptotă verticală. **5p**
1. c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$ sau $x = 0;\ f(0) = 0;\ f(-2) = -4 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) \leq f(-2), (\forall) x \in (-\infty; -1) \Rightarrow f(x) \leq -4, (\forall) x \in (-\infty; -1)$. **5p**
2. a)	$\int (x+1) \cdot \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + \mathscr{C}$. **5p**
2. b)	$\int_1^e (x+1) \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$. **5p**
2. c)	$V = \pi \cdot \int_1^2 g^2(x) dx = \pi \cdot \int_1^2 \left[\frac{1}{x(x+1)}\right]^2 dx = \pi \cdot \int_1^2 \left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x(x+1)} + \right.$ $\left. + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx = \pi \cdot \left[\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx - 2\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx + \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx\right] = \pi \cdot \left(\frac{2}{3} + \ln\frac{9}{16}\right)$. **5p**

TESTUL 18

Subiectul I.

1.	$b_2 = b_1 \cdot q \Rightarrow b_1 \cdot q = 4 \Rightarrow b_1 = \frac{4}{q}$. $b_4 = b_1 \cdot q^3 \Rightarrow b_1 \cdot q^3 = 16 \Rightarrow \frac{4}{q} \cdot q^3 = 16 \Rightarrow$ $\Rightarrow q^2 = 16 \Rightarrow q = \pm 4$. Dacă $q = 4 \Rightarrow b_1 = \frac{4}{4} = 1$. Dacă $q = -4 \Rightarrow b_1 = \frac{4}{-4} = -1$. **5p**
2.	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m$. $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m$. $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$. $m_1 = -1$; $m_2 = 3$. **5p**
3.	$x^2 + 8x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -8] \cup [0, \infty)$. $\left(\sqrt{x^2 + 8x}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$. $x_{1,2} = x_1 = -9 \in (-\infty; -8] \cup [0, \infty)$. $x_2 = 1 \in (-\infty; -8] \cup [0, \infty)$. $S = \{-9; 1\}$. **5p**
4.	$C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{5!}{4! \cdot 1!} + \frac{5!}{5! \cdot 0!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 1 \cdot 2} + \frac{4! \cdot 5}{4! \cdot 1} + 1 = 10 + 5 + 1 = 16$. **5p**
5.	$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 2 - 3 + 5 + 1 - 6 = 11 - 11 = 0 \Rightarrow A, B, C$ coliniare. **5p**
6.	Din teorema cosinusului $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = m + 6 + 1 - 3 + m + 2 \Rightarrow \det A = 2m + 6$. **5p**
1. b)	$m = 3 \Rightarrow \det A = 12 \Rightarrow$ sistemul are soluție unică. Aplicăm cu regula lui *Cramer*. $\Delta_1 = 12$. $\Delta_2 = 12$. $\Delta_3 = 12$. $x = \frac{\Delta_1}{\det A} = 1$; $y = \frac{\Delta_2}{\det A} = 1$; $z = \frac{\Delta_3}{\det A} = 1$. $S = \{(1; 1; 1)\}$. **5p**
1. c)	$m = 1 \Rightarrow \det A = 8 \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă. **5p**
2. a)	$x \circ x = 7 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3x + 12 = 7 \Rightarrow x_1 = 1 \in \mathbf{Z}$; $x_2 = 5 \in \mathbf{Z}$. **5p**
2. b)	$(\exists) e \in \mathbf{Z}$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, (\forall) x \in \mathbf{Z}$. $x \circ e = x \Rightarrow xe - 3x - 3e + 12 = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(e-4) - 3(e-4) = 0 \Leftrightarrow (e-4)(x-3) = 0, (\forall) x \in \mathbf{Z} \Rightarrow e - 4 = 0 \Rightarrow e = 4 \in \mathbf{Z}$. **5p**
2. c)	x este simetrizabil în raport cu "$\circ$" dacă $(\exists) x' \in \mathbf{Z}$, astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = e$. $x \circ x' = e \Rightarrow xx' - 3x - 3x' + 12 = 4 \Rightarrow x'(x-3) = 3x - 8 \Rightarrow x' = \frac{3x-8}{x-3}$ **=5p** $= 3 + \frac{1}{x-3} x^1 \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{1}{x-3} \in \mathbf{Z} \Rightarrow x - 3 \mid 1 \Rightarrow x - 3 = 1$ sau $x - 3 = -1 \Rightarrow x = 4$ sau $x = 2$.

Subiectul III.

1. a)	$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$. $f(0) = 0$. $f'(x) = e^x - x - 1$. $f'(0) = 0$. Ecuația tangentei: $y = 0$. **5p**
1. b)	$f''(x) = e^x - 1$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. $f(0) = 0$. $x = 0$ este punct de inflexiune. **5p**
1. c)	$f''(\tilde{x}) \geq 0, (\forall) x \in [0, \infty) \Rightarrow f'$ este crescătoare pe $[0, \infty) \Rightarrow f'(x) \geq f'(0), (\forall) x \in$ $\in [0, \infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0, (\forall) x \in [0, \infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, \infty) \Rightarrow f(x) \geq$ $\geq f(0), (\forall) x \in [0, \infty) \Rightarrow e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^x \geq \frac{x^2}{x} + x + 1, (\forall) x \geq 0$. **5p**
2. a)	$\int x \cdot \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + \mathscr{C}$. **5p**
2. b)	$\int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2}$. **5p**
2. c)	$\ln x \leq x - 1 \mid : x \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \leq \int_1^e dx - \int_1^e \frac{1}{x} dx = x \Big|_1^e - \ln x \Big|_1^e =$ $= e - 1 - \ln e + \ln 1 = e - 2$. **5p**

TESTUL 19

Subiectul I.

1.	$a_4 = a_2 + 2r \Rightarrow r = 4.\ a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_1 = -1.\ a_9 = a_1 + 8r \Rightarrow a_9 = -1 + 32 = 31.$ **5p**
2.	$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right).\ V(2;-1) \in d \Leftrightarrow 2 + 2 \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 = 0.$ **5p**
3.	$x + 3 > 0 \Rightarrow x \in (-3;\infty),\ x + 1 > 0 \Rightarrow x \in (-1;\infty) \Rightarrow x \in (-1;\infty).\ \log_2 \frac{x+3}{5} = \log_2 (3x+3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -\frac{12}{14} \Leftrightarrow x = -\frac{6}{7} \in (-1,\infty) \Rightarrow S = \left\{-\frac{6}{7}\right\}.$ **5p**
4.	$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4}{2!} = 12.$ **5p**
5.	$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3\vec{j}.$ $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = -4.$ **5p**
6.	$\cos(180^\circ - x) = -\cos x.\ \sin(90^\circ - x) = \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos(180^\circ - x) = -\frac{2}{5}.$ **5p**

Subiectul II.

1. a)	$\Delta(2,3) = 0$, deoarece are primele două coloane egale. **5p**
1. b)	$\Delta(a,b) = (a-2)(b-2)(b-a).$ **5p**
1. c)	$\Delta(2^x, 4^x) = (2^x - 2)(4^x - 2)(4^x - 2^x) = 0 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ sau $4^x = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ sau $4^x = 2^x \Rightarrow 2^{2x} = 2^x \Rightarrow 2x = x \Rightarrow x = 0.$ **5p**
2. a)	$1 \perp 2 = 1 + 2 - 1 = 2.\ (1 \perp 2) \circ 3 = 2 \circ 3 = 2 \cdot 3 - 2 - 3 + 2 = 3.$ **5p**
2. b)	$x \circ y = x(y-1) - (y-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1.$ Prin inducție $\Rightarrow P(n)$: $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_n - 1) + 1, (\forall) n \geq 2.$ **5p**
2. c)	Avem: $\frac{3}{2} \circ \frac{5}{3} \circ \frac{7}{4} \circ \ldots \circ \frac{19}{10} = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{5}{3} - 1\right)\left(\frac{7}{4} - 1\right)\ldots\left(\frac{19}{10} - 1\right) + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot$ $\cdot \ldots \cdot \frac{9}{10} + 1 = \frac{1}{10} + 1 = \frac{11}{10}.$ **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = e^x + xe^x - 1.$ **5p**
1. b)	$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = e^x(2+x).\ f''(x) = 0 \Rightarrow x = -2;\ f(-2) = -\frac{2}{e^2} + 3.$ $x = -2$ punct de inflexiune. **5p**
1. c)	$f'(x) = e^x + x \cdot e^x - 1.$ Observăm că $f'(0) = 0.\ f''(x) > 0$ pe $(0,\infty) \Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe $(0,\infty) \Rightarrow f'(x) > f'(0), (\forall) x \in (0,\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0,\infty).\ \sqrt{2} < e \Rightarrow f(\sqrt{2}) < f(e) \Rightarrow \sqrt{2e^{\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 1} < e \cdot e^e - e +$ $+1 \Leftrightarrow \sqrt{2}(e^{\sqrt{2}} - 1) < e(e^e - 1) \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{2}} - 1}{e^e - 1} < \frac{e}{\sqrt{2}}.$ **5p**
2. a)	$\int (x+1) \cdot f_3(x)dx = \int (x+1) \cdot \frac{x^3}{x+1}dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + \mathscr{C}.$ **5p**
2. b)	$f_2(x) = \frac{x^2}{x+1} \geq 0, (\forall) x \in [0,1] \Leftrightarrow \mathcal{A} = \int_0^1 f_2(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1}dx =$ $= \int_0^1 \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{x}\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 + \ln(x+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$ **5p**
2. c)	$(\forall) x \in (0,1), f_{2016}(x) \leq x^{2016} \Rightarrow \int_0^1 f_{2016}(x)dx \leq \int_0^1 x^{2016}dx \Leftrightarrow \int_0^1 f_{2016}(x)dx \leq \frac{x^{2017}}{2017}\Big|_0^1 = \frac{1}{2017}$ **5p**

TESTUL 20

Subiectul I.

1.	$a_1 = 1;\ a_2 = 4 \Rightarrow r = 3.\ a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \Rightarrow a_n = 1 + 3n - 3 = 3n - 2.$ $a_n = 2017 \Rightarrow 3n - 2 = 2017 \Rightarrow 3n = 2019 \Rightarrow n = 673 \Rightarrow 2017 = a_{673}$. **5p**
2.	$\min f = -\frac{\Delta}{4a}.\ \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4m = -4(m-1) \Rightarrow m = 3$. **5p**
3.	$x^2 - 3x + 6 \geq 0.\ \Delta = 9 - 24 < 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R}.\ \left(\sqrt{x^2 - 3x + 6}\right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 = 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0.\ \Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 1$. **5p**
4.	$\overline{abc};\ a \in \{1,2\},\ b \in \{0,1,2\},\ c \in \{0,1,2\} \Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ numere. **5p**
5.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \left\lvert \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right\rvert = \left\lvert \overrightarrow{AC} \right\rvert = AC.\ AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow$ $\Rightarrow AC = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \left\lvert \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right\rvert = 5.$ **5p**
6.	$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 5\sqrt{2}$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A(2) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$. **5p**
1. b)	$\det A(a) = \begin{vmatrix} a+1 & 2 \\ a & a \end{vmatrix} = a(a+1) - 2a = a^2 + a - 2a = a^2 - a = a(a-1).$ $A(a)$ nu este inversabilă $\Leftrightarrow \det A(a) = 0 \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0$ sau $a = 1$. **5p**
1. c)	$A^2(1) = A(1) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot A(1).$ Arătăm că: $A^n(1) = 3^{n-1} \cdot A(1), (\forall) n \geq 1$. Prin inducție matematică. **5p**
2. a)	$m = 2 \Rightarrow f = X^3 - 4X^2 + X - 2.\ f(1) = 1 - 4 + 1 - 2 = -4$. **5p**
2. b)	$f \vdots X - 2 \overset{T.Bezout}{\Rightarrow} f(2) = 0.\ f(2) = 8 - 8m + 2 - 2 = 8(1-m) = 0 \Rightarrow m = 1$. **5p**
2. c)	$m = 1 \Rightarrow x_1 = 2$ și $f \vdots X - 2.\ f = X^3 - 2X^2 + X - 2.\ q = X^2 + 1.$ $q(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x_2 = i$ și $x_3 = -i$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3\ln x + 1)$. **5p**
1. b)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (0,\infty)$ sau $3\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{3}}$. $f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \ln e^{-\frac{1}{3}} = e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3e}$. Pentru $x \in \left(0, e^{-\frac{1}{3}}\right]$ f este strict descrescătoare și pentru $x \geq e^{-\frac{1}{3}}$ f este strict crescătoare. **5p**
1. c)	$x = e^{-\frac{1}{3}}$ punct de minim $\Rightarrow f(x) \geq f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) \Rightarrow f(x) \geq -\frac{1}{3e}, (\forall) x \in (0,\infty)$. **5p**
2. a)	F este o funcție derivabilă. $F'(x) = e^x(x^2 - x + 2) + e^x(2x - 1) =$ $= e^x(x^2 + x + 1) = f(x), (\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow F$ este o primitivă a lui f pe $\mathbf{R}$. **5p**
2. b)	Fie $G: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o primitivă oarecare a lui $f \Rightarrow G'(x) = f(x), (\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ $\Rightarrow G'(x) = e^x(x^2 + x + 1).\ e^x > 0, (\forall) x \in \mathbf{R}.\ x^2 + x + 1 > 0, (\forall) x \in \mathbf{R}.$ Deci $G'(x) > 0, (\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow G$ este strict crescătoare. **5p**
2. c)	$f(x) > 0, (\forall) x \in [0,1] \Rightarrow \mathcal{A} = \int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big\rvert_0^1 = F(1) - F(0) = 2(e-1)$. **5p**

TESTUL 21

Subiectul I.

1.	$r=-1, a_1=7$. **3p** $a_4=a_1+3r \Rightarrow a_4=7-3 \Rightarrow a_4=4$. **2p**
2.	$(f\circ g)(-2)=f((g(-2))), g(-2)=0$. **3p** $f(0)=-1$. **2p**
3.	$x^2+5>0, (\forall)x\in\mathbf{R}$. **2p** $x^2+5=16 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{11}$. **3p**
4.	C_6^2 - număr de submulțimi cu 2 elemente. **3p** $C_6^2=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$. **2p**
5.	$\frac{m+1}{5}=\frac{m}{3}$. **3p** $3m+3=5m \Rightarrow m=\frac{3}{2}$. **2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sin 30^\circ}{2}$. **3p** $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A^2-5A+4I_2=\begin{pmatrix}5&10\\10&20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&10\\10&20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=$ **3p** $=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$. **2p**
1. b)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}-3&6\\-6&12\end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix}-3&-6\\6&12\end{pmatrix} \Rightarrow AB=BA$. **5p**
1. c)	$\det(A\cdot B)=\begin{vmatrix}-3&6\\-6&12\end{vmatrix}=0$. **2p** $\det A=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0$, $\det B=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&4\end{vmatrix}=0$. **2p** $\det(A\cdot B)+\det A-\det B=0$. **1p**
2. a)	$xy-5x-5y+30=xy-5x-5y+25+5=x(y-5)-5(y-5)+5=$**3p** $=(x-5)(y-5)+5$. **2p**
2. b)	$x*x=(x-5)(x-5)+5=(x-5)^2+5, (x-5)^2+5=6$ **3p** $x_1=6, x_2=4$. **2p**
2. c)	$x\circ 5=5, (\forall)x\in\mathbf{R}, 5\circ y=5, (\forall)y\in\mathbf{R}$. **2p** $\underbrace{1*2*3*4}_{x}*5*\underbrace{6*\ldots*2018}_{y}=x*5*y=5*y=5$. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty, \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$. **3p** $x=-2$asimptotă verticală. **2p**
1. b)	$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1, n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x+2}=1$. **3p** $y=mx+n, y=x+1$, este asimptotă oblică spre $-\infty$. **2p**
1. c)	$f'(x)=\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2}>0$. **3p** $f''(x)=\frac{-2}{(x+2)^3}>0, (\forall)x\in(-\infty,-2) \Rightarrow f$ este convexă pe $(-\infty,-2)$. **2p**
2. a)	$\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big\|_0^1=$ **2p** $=-e^{-1}+e^0=\frac{-1}{e}+1=\frac{e-1}{e}$. **3p**
2. b)	$\int_0^1 xe^{-x^2},dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big\|_0^1=\frac{e-1}{2e}$. **5p**
2. c)	$V=\pi\int_0^1 e^{-2x}dx=\pi\cdot\frac{-e^{-2x}}{2}\Big\|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$. **5p**

TESTUL 22

Subiectul I.

1.	$(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$. **3p** $(1-\sqrt{3})^2=4-2\sqrt{3}$. **1p** $(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2=8$. **1p**
2.	$\lvert z\rvert=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$. **3p** $\lvert z\rvert=\sqrt{3+1}=2$. **2p**
3.	Notăm $2^x=t, t>0, 2^{2x}=4^x=t^2 \Rightarrow$ **1p** $t^2+t-6=0$. $t_1=2, t_2=-3$. **3p** $2^x=2\Rightarrow x=1$. **1p**
4.	Numere de forma $\overline{ab}, a,b\in\{1,2,3\}$ sunt 11; 12; 13; 21; 22; 23; 31; 32; 33, deci 9 numere. **5p**
5.	$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\Rightarrow$ **2p** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}\Rightarrow x-y+1=0$. **3p**
6.	ΔABC - isoscel, $m(\sphericalangle A)=60^\circ\Rightarrow\Delta ABC$ - echilateral **2p** $h=\frac{l\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}, R=\frac{2}{3}\cdot h=2\sqrt{3}$. **3p**

Subiectul II.

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}25&18\\18&13\end{pmatrix}$. **3p** $B^2=\begin{pmatrix}13&-18\\-18&25\end{pmatrix}$. **2p**
1. b)	$A^2+B^2=\begin{pmatrix}38&0\\0&38\end{pmatrix}$. **3p** $38I_2=38\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38&0\\0&38\end{pmatrix}$. **2p**
1. c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}4&3\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&3\\3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$. **3p** $\det(A\cdot B)=\det I_2=1$. **2p**
2. a)	$X-1\mid f\Leftrightarrow f(1)=0$. **3p** $f(1)=1^3+3\cdot1^2-3\cdot1=0\Rightarrow X-1\mid f$. **2p**
2. b)	$x_1+x_2+x_3=-3$. $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3$. **3p** $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=9+6=15$. **2p**
2. c)	$f(2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$. **3p** $f(2)=2^3+3\cdot2^2-3\cdot2-1=13$. **2p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$. **3p** $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$. **2p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$. **3p** $f'(3)=\frac{3+1}{9}=\frac{4}{9}$. **2p**
1. c)	Ecuația tangentei în punctul $(1,-1)$ este: $y+1=f'(1)(x-1)$ **3p** $f'(1)=2\Rightarrow y+1=2(x-1)\Rightarrow 2x-y-3=0$. **2p**
2. a)	$\int\limits_{-1}^{1}(3^x+3^{-x})dx=\left(\frac{3^x}{\ln3}-\frac{3^{-x}}{\ln3}\right)\Big\rvert_{-1}^{1}=$ **2p** $=\frac{1}{\ln3}(3-3^{-1}-3^{-1}+3)=\frac{16}{3\ln3}$. **3p**
2. b)	F - primitiva lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x),(\forall)x\in\mathbf{R}, F''(x)=f'(x),(\forall)x\in\mathbf{R}$ $F''(x)=3^x\ln3-3^{-x}\ln3=(3^x-3^{-x})\ln3=\frac{(3^{2x}-1)\ln3}{3^x}$ $F''(x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow F$ - concavă pe $(-\infty,0]$; F convexă pe $[0,\infty)$. **5p**
2. c)	$V=\pi\int\limits_0^1 3^{-2x}dx=-\frac{\pi}{2}\left.\frac{3^{-2x}}{\ln3}\right\rvert_0^1=\frac{\pi}{2\ln3}-\frac{\pi}{18\ln3}$. **5p**

TESTUL 23

Subiectul I.

1.	$r = a_2 - a_1 = 3$, $a_6 = a_1 + 5r = 17$. **3p** $S_6 = \frac{(a_1 + a_6)\cdot 6}{2} = 57$. **2p**
2.	$\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = m^2 - 36 \Rightarrow m^2 - 36 = 0$. **3p** $m_{1,2} = \pm 6$. **2p**
3.	$x^2 - 10 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, \infty)$. **2p** $x^2 - 10 = 2^3 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3\sqrt{2}$, convin. **3p**
4.	A_5^3. **3p** $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. **2p**
5.	$M(2,2)$. **2p** $OM = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. **3p**
6.	$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$. **3p** $\cos A = \frac{25 + 75 - 100}{2 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3}}$, $\cos A = 0$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **2p** $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$. **3p**
1. b)	$\det A = 1$, $A^{-1} = A^*$. **2p** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **3p**
1. c)	$X = A^{-1} \cdot B$. **2p** $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **3p**
2. a)	$x * y = 3x(y+4) + 12(y+4) - 4$. **3p** $x * y = 3(x+4)\cdot(y+4) - 4$. **2p**
2. b)	$\exists e \in M, (\forall) x \in M, x * e = e * x = x$. **2p** $x * e = x \Rightarrow (x+4)(3e + 12 - 1) = 0 \Rightarrow 3e = -11 \Rightarrow e = \frac{-11}{3}$. $e \in M$. **3p**
2. c)	$x * x * x = 3^2(x+4)^3 - 4$. **3p** Ecuația $3^2(x+4)^3 = 9 \Rightarrow (x+4)^3 = 1 \Rightarrow x = -3 \in M$. **2p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = \frac{(2x-1)' \cdot (x-1) - (x-1)' \cdot (2x-1)}{(x-1)^2}$. **3p** $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$. **2p**
1. b)	$\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2)$. **3p** $f'(x) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$. **2p**
1. c)	$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, (\forall) x > 1$. **2p** $\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1, \infty)$. **3p**
2. a)	f este derivabilă pe $[1, \infty)$. **3p** Demonstrăm că $f'(x) = g(x), f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} = g(x), (\forall) x \geq 1$. **2p**
2. b)	Folosind a) avem $\int_1^e f(x) \cdot g(x)dx = \int_1^e f(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2}\Big|_1^e$ – **3p** $-\frac{f^2(x)}{2}\Big|_1^e = \frac{f^2(e)}{2} - \frac{f^2(1)}{2} = \frac{1}{2e^2}$. **2p**
2. c)	$\int_1^a \frac{\ln x}{x}dx = 2 \Rightarrow \int_1^a \ln x(\ln x)'dx = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^a = 2 \Rightarrow$ **3p** $a_1 = e^2, a_2 = e^{-2} \notin [1, \infty)$. **2p**

TESTUL 24

Subiectul I.

1.	$3-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\in\mathbf{N}$. **5p**
2.	Ecuația devine $2^{x^2-4x}=2^{-3}$. **2p** $x^2-4x=-3\Rightarrow x^2-4x+3=0, x_1=3, x_2=1$. **3p**
3.	$P=\frac{\text{număr de cazuri favorabile}}{\text{număr de cazuri posibile}}$; cazuri favorabile sunt numerele: 27; 64 (2 numere). **3p** Număr de cazuri posibile: 90; $P=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$. **2p**
4.	$C_{n+1}^1=n^2-1\Leftrightarrow n+1=n^2-1\Rightarrow$ **3p** $n^2-n-2=0\Rightarrow n_1=2, n_2=-1$, convine $n_1\in\mathbf{N}$. **2p**
5.	$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\Rightarrow\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-0}{-2-0}\Rightarrow 2x+2y-6=0$. **5p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$. **3p** $BC^2=16+36-48\cdot\frac{1}{2}=28$, deci $BC=2\sqrt{7}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}2x & 2y+12\\ 0 & 12\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}2x & 2x+2y\\ 0 & 12\end{pmatrix}$. **3p** $A\cdot B=B\cdot A\Leftrightarrow 2y+12=2x+2y\Rightarrow 2x=12\Rightarrow x=6, y\in\mathbf{R}$. **2p**
1. b)	$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 0 & 4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. **3p** $A-I_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, deci $A^2=4(A-I_2)$. **2p**
1. c)	$A=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^2=2^2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^3=2^3\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. **3p** $A^3-aA^2+4A=O_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}16-4a & 32-8a\\ 0 & 16-4a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=4$. **2p**
2. a)	$f(a)=f(-a)\Rightarrow a^4+3a^3-3a+1=a^4-3a^3+3a+1\Rightarrow$ **3p** $\Rightarrow 6a^3-6a=0\Rightarrow a(a^2-1)=0\Rightarrow a\in\{0,1,-1\}$. **2p**
2. b)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4)=9-2\cdot 0=9$, deoarece $x_1+x_2+x_3+x_4=-3$ și $x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4=0$. **5p**
2. c)	$f(x)=0\Rightarrow x^4+3x^3-3x+1=0\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$. Notăm $x-\frac{1}{x}=t\Rightarrow$ $\Rightarrow t^2+2+3t=0\Rightarrow t^2+3t+2=0, t_1=-1, t_2=-2$ Din $x-\frac{1}{x}=-1\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. $x-\frac{1}{x}=-2\Rightarrow x_{3,4}=-1\pm\sqrt{2}$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=1-\frac{e}{x}$. **3p** $f'(x)=\frac{x-e}{x}$. **2p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to e}\frac{x-e\ln x}{1-\frac{e}{e}}$. **3p** Aplicând regula lui *L'Hospital* $\Rightarrow\lim\limits_{x\to e}\frac{1-\frac{e}{x}}{\frac{e}{x^2}}=0$. **2p**
1. c)	f derivabilă pe $(0,\infty)$ și $f'(x)=0\Rightarrow\frac{x-e}{x}=0\Rightarrow x=e$. **2p** Din tabelul de variație al funcției f se deduce că f este descrescătoare pe $(0,e]$ și crescătoare pe $[e,\infty)$. **3p**
2. a)	$f'(x)=g(x), (\forall)x>0$. **3p** $f'(x)=(x^2+x\ln x)'=2x+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$. $g(x), (\forall)x>0\Rightarrow f$ este primitiva lui g. **2p**
2. b)	$\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx=\int_1^e f(x)\cdot f'(x)dx=\frac{f^2(x)}{2}\Big|_1^e=\frac{f^2(e)}{2}-\frac{f^2(1)}{2}=$ **2p** $=\frac{(e^2+e)^2-1}{2}$. **3p**
2. c)	$\mathcal{A}=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e(x^2+x\ln x)dx\Rightarrow$ **2p** $\mathcal{A}=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^e=\frac{4e^3+3e^2-1}{12}$. **3p**

TESTUL 25

Subiectul I.

1.	$a_3 = a_1 + 2r = 5, a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow a_1 = 1, r = 2$ **3p** $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 19$. **2p**
2.	$f(0) = -3, f(6) = 3, f(12) = 9$. **3p** $f(0) + f(6) + f(12) = 9$. **2p**
3.	$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. **2p** Ecuația devine $x^2 - 1 = 3$, de unde $x_1 = 2$ și $x_2 = -2$ **3p**
4.	$P = \frac{\text{număr de cazuri favorabile}}{\text{număr de cazuri posibile}}$. $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. **5p**
5.	Fie h dreapta care trece prin M și $h \parallel d$. Atunci $m_d = m_h \Rightarrow m_h = -2$. **2p** $h: 2x + y - 1 = 0$. **3p**
6.	$\frac{AC}{\sin B} = 2R$. **3p** $\sin B = \frac{AC}{2R} \Rightarrow \sin B = \frac{6}{6} = 1$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1$. **5p**
1. b)	$A^2 - 6A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. **5p**
1. c)	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\det B = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1$. **3p** $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. **2p**
2. a)	$(\forall) x, y, z \in \mathbf{R}$, $(x * y) * z = (xy + x + y) * z = xyz + xz + yz + xy + x + y + yz$. **3p** $x * (y * z) = x * (yz + y + z) = xyz + xy + xz + x + y + z$ **2p**
2. b)	$(\exists) e \in \mathbf{R}$, astfel încât $(\forall) x \in \mathbf{R}$, $x * r = e * x = x$. $x * e = e * x = xe + x + e, (\forall) x \in \mathbf{R}$ $ex + e = 0 \Rightarrow e(x + 1) = 0 \Rightarrow e = 0 \in \mathbf{R}$. **5p**
2. c)	$x^2 * 2 = 3x^2 + 2, x * 4 = 5x + 4$. **3p** $x * 4 = x^2 + 2 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0, x_1 = \frac{-1}{3}, x_2 = 2$. **2p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - x^2 - x - 2}{(x-1)^2}$. **3p** $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$. **2p**
1. b)	$f'(x) = 0, x^2 - 2x - 3 = 0, x_1 = -1, x_2 = 3$. **2p** Analizând tabelul de variație $\Rightarrow x = -1$ este punct de maxim, $x = 3$ punct de minim. **3p**
1. c)	$m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2} = 1$. **2p** $n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 2 - x^2 + x}{x - 1} = 2 \Rightarrow y = x + 2$ asimptotă oblică la Gf. **3p**
2. a)	$\int_0^1 (x^2 + 9) f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 9) \frac{x^3 + 9x - 1}{x^2 + 9} dx = \int_0^1 (x^3 + 9x - 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} - x \right) \Big|_0^1 = \frac{15}{4}$. **5p**
2. b)	$\int_{\sqrt{3}}^3 f(x)dx = \int_{\sqrt{3}}^3 \left(x - \frac{1}{x^2 + 9} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \right) \Big|_{\sqrt{3}}^3 = 3 - \frac{\pi}{36}$. **5p**
2. c)	$g(x) = f(x) + \frac{1}{x^2 + 9} = x - \frac{1}{x^2 + 9} + \frac{1}{x^2 + 9} = x$. **2p** $V = \int_0^1 g^2(x)dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. **3p**

TESTUL 26

Subiectul I.

1.	$z=\frac{i-1}{-2}-\frac{i+1}{-2}$. **3p** $z=\frac{i-1-i-1}{-2}=+1\in\mathbf{R}$. **2p**
2.	$x^2-5x+6=0\Rightarrow x_1=2, x_2=3\Rightarrow$ **2p** $x\in[2,3]\cap\mathbf{Z}\Rightarrow x\in\{2,3\}$. **3p**
3.	$x>0\Rightarrow x\in(0,\infty), \log_2 x=t, t\in\mathbf{R}$. **2p** $t^2+7t+12=0\Rightarrow t_1=-3, t_2=-4, x_1=\frac{1}{8}, x_2=\frac{1}{16}$, convin. **3p**
4.	$P=\frac{\text{număr de cazuri favorabile}}{\text{număr de cazuri posibile}}$; **1p** Număr de cazuri posibile: 2014 : 2 = 1007. **2p** Număr de cazuri favorabile: $4\cdot 1; 4\cdot 2; \ldots; 4\cdot 503$, adică 503 numere, $P=\frac{503}{1007}$. **2p**
5.	Fie M - mijlocul lui $[AB]\Rightarrow x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1}{2}, y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5}{2}$. Fie d - mediatoarea segmentului AB, $m_d\cdot m_{AB}=-1$. **3p** $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-2}{2+1}=\frac{1}{3}$, $m_d=-3\Rightarrow$ecuația lui d: $3x+y-4=0$. **2p**
6.	$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{5}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{5}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{5}{\sqrt{3}}\Rightarrow$ **3p** $\sin 2x=\frac{2\sqrt{3}}{5}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$\Delta(6)=30$. **5p**
1. b)	$\Delta(x)=(x-1)\cdot x\cdot(x-5)$. **5p**
1. c)	$\Delta(5^x)=0\Rightarrow(5^x-1)\cdot 5^x\cdot(5^x-5)=0\Rightarrow$ **3p** $x_1=0, x_2=1$. **2p**
2. a)	$X^2-4\mid f\Leftrightarrow f(2)=0$ și $f(-2)=0$. $f(2)=16m+8n-1$. $f(-2)=16m-8n-1\Rightarrow$ $\Rightarrow 32m=2\Rightarrow m=\frac{1}{16}, n=0$. **5p**
2. b)	Dacă $m=1, n=0\Rightarrow f=x^4-1\Rightarrow f=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm i\in\mathbf{C}$ și $x_{3,4}=\pm 1\in\mathbf{R}$. **5p**
2. c)	Dacă $m=2, n=-1\Rightarrow f=2x^4-x^3-1$. **2p** $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=S_1^2-2S_2$. **2p** $S_1=\frac{-1}{2}, S_2=0\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\frac{1}{4}$. **1p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}>0, (\forall)x\in\mathbf{R}$. **3p** Cum $f'(x)>0, (\forall)x\in\mathbf{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare. **2p**
1. b)	Funcția f este injectivă pentru că este strict crescătoare. **2p** Funcția f este surjectivă pentru că este continuă și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. **3p**
1. c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2, m=2\in\mathbf{R}$. **2p** $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\infty\notin\mathbf{R}\Rightarrow f$ nu are asimptotă oblică spre $+\infty$. **3p**
2. a)	$f(x)=F'(x)=(2x+4)e^x+(x^2+4x+6)e^x$. **3p** $F'(x)=(x^2+6x+10)e^x=f(x)$. **2p**
2. b)	$\int_0^1(x+3)^2\cdot e^x dx=\int_0^1(x^2+6x+9)e^x dx=\int_0^1(x^2+6x+10)e^x dx-\int_0^1 e^x dx=$ **3p** $=F(x)\mid_0^1-e^x\mid_0^1=F(1)-F(0)-e+1=10e-5$. **2p**
2. c)	Fie G o primitivă a lui F. Cum G este strict crescătoare și $\lim\limits_{x\to\infty}G(x)=\infty$, avem **3p** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2e^x}\cdot\int_0^1 F(t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{G(x)-G(0)}{x^2e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{2xe^x+x^2e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+6}{x^2+2x}=1$. **2p** (s-a aplicat regula lui *L'Hospital*).

TESTUL 27

Subiectul I.

1.	$z=3+2-i=5-2i$. **3p** $\lvert z\rvert=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$. **2p**
2.	$x_1+x_2=3$, $x_1x_2=10$. **3p** $x_1+x_2+2x_1x_2=3+2\cdot 10=23$. **2p**
3.	$2^{2x+4}=2^{x^2+5}$. **2p** Ecuația devine $2x+4=x^2+5$, adică $(x-1)^2=0$, de unde $x=1$. **3p**
4.	Numărul de numere de 3 cifre distincte este: A_4^3. **3p** $A_4^3=\frac{4!}{(4-3)!}=24$. **2p**
5.	Fie M - mijlocul lui $[BC]$. Atunci $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=2$ și $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=0$. **3p** Atunci lungimea medianei AM este $AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=\sqrt{16}=4$. **2p**
6.	$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}\Rightarrow 2R=\frac{AC}{\sin B}=10\Rightarrow R=5$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	Finalizare, calcul direct. **5p**
1. b)	$I_2=X(0)$, aplicând relația de la a) $X(a)\cdot X(b)=X(a+a'+aa')$. **3p** Egalând cu $X(0)\Rightarrow a+a'+a\cdot a'=0$, de unde $a'=\frac{-a}{1+a}$, $(\forall)\, a\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$. **2p**
1. c)	Se observă că $X(a)\cdot X(b)=X((a+1)\cdot(b+1)-1)$ și prin inducție matematică se demonstrează că $X(x_1)\cdot X(x_2)\cdot\ldots\cdot X(x_n)=X((x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_{n+1})-1)$. **3p** Atunci $X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(n)=X((n+1)!-1)$. **2p**
2. a)	Prin împărțire directă avem $c=X+3$, $r=4$. **5p**
2. b)	$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)$, deci $f(1)=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=1$. **5p**
2. c)	$x_1^3=-3x_1^2+4x_1+1$, $x_2^3=-3x_2^2+4x_2+1$, $x_3^3=-3x_3^2+4x_3+1\Rightarrow$ **2p** $\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=-3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4(x_1+x_2+x_3)+3=-3\cdot 17+4\cdot(-3)+3=-60$, unde $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_2x_2+x_1x_3+x_2x_3)=9+8=17$. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$. **2p** $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x+2}+x^2}=0$, deci $y=x$ este asimptotă oblică. **3p**
1. b)	$x^3-3x+2=(x-1)^2\cdot(x+2)$, $\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}}$, **3p** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\infty$, deci f nu are derivabilă în $x_0=-2$. **2p**
1. c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3-3x^2+2)}{3\ln x}=$ **3p** $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3-3x^2+2)}{\ln x^3}=1$. **2p**
2. a)	F este primitiva lui f, dacă și numai dacă F derivabilă și $F'(x)=f(x)$, **2p** $\frac{2ax^2+bx+a}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, de unde $a=1$, $b=1$. **3p**
2. b)	F este crescătoare, dacă și numai dacă $F'(x)>0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$. **3p** $F'(x)=f(x)=\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}>0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$. **2p**
2. c)	$F''(x)=f'(x)=\frac{2x^3+3x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=0\Rightarrow$ **2p** $\Rightarrow 2x^3+3x+1=0$. Ecuația obținută are o singură rădăcină reală, deoarece, dacă $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=2x^3+3x+1$, avem: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=-\infty$ și $g'(x)=6x^2+3>0$. **5p**

TESTUL 28

Subiectul I.

1.	$\lvert z\rvert = \frac{\lvert 1+5i\rvert}{\lvert 2+3i\rvert}$. **2p** $\lvert z\rvert = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}} = \sqrt{2}$. **3p**
2.	$Gf \cap Ox : f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow A(1,0), B(-1,0)$. **3p** $Gf \cap Oy : x = 0, y = f(0) = -1$, deci $C(0,-1)$. **2p**
3.	Dacă $x > 1$, **2p** ecuația devine $\log_5(3x+1) = \log_5 5(x-1)$. $3x+1 = 5x-5 \Rightarrow x = 3 \in (1,\infty)$. **3p**
4.	Ecuația devine: $\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-1)!} = 10 \Rightarrow$ **3p** $\Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$. **2p**
5.	$m_d = \frac{5}{4} \Rightarrow m_{d'} \cdot m_d = -1 \Rightarrow m_{d'} = \frac{-4}{5} \Rightarrow$ **2p** $\Rightarrow d' : 4x + 5y - 1 = 0$. **3p**
6.	p - semiperimetrul, $p = 7$. **2p** $r = \frac{S}{p}$, $S = \sqrt{p(p-5)(p-6)(p-3)} = 2\sqrt{14}$, $r = \frac{2\sqrt{14}}{7}$. **3p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A = 4a + 10$. **3p** A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{-5}{2}\right\}$. **2p**
1. b)	$\det(A^2) = (\det A)^2 = (4a+10)^2$. **2p** $\Rightarrow 4a + 10 = 10$ sau $4a + 10 = -10 \Rightarrow a \in \{-5, 0\}$. **3p**
1. c)	Pentru $a = 1$, $\det A = 14 \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este un sistem cramerian $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$, $\Delta x = 28$, $\Delta y = 42$, $\Delta z = -14$. **2p** $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$. **3p**
2. a)	$x * y = (x-2)(y-2) + 2$. **2p** $(\forall) x, y, z \in \mathbf{Z}$, $x * y * z = (x-2)(y-2)(z-2) + 2$ **3p**
2. b)	Determinăm elementul neutru: $\exists e \in \mathbf{Z}$, astfel încât $(\forall) x \in \mathbf{Z}$, $x * e = e * x = x$, $x * e = (x-2)(e-2) + 2 = x \Rightarrow (x-2)(e-2) - (x-2) = 0 \Rightarrow e = 3$, $e \in \mathbf{Z}$ **3p** $x \in \mathbf{Z}$ este simetrizabilă dacă $\exists x' \in \mathbf{Z}$, astfel încât $x * x' = x' * x = e$, pentru $x \neq 2 \Rightarrow x' =$ $= \frac{2x-3}{x-2} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x - 2 \mid 2x - 3$. $x = 1, x = 3$ - singurele elemente simetrizabile. **2p**
2. c)	Folosind a) $\Rightarrow (\log_2 x - 2)(\log_3 y - 2) + 2 = 2 \Rightarrow$ **2p** $\Rightarrow \log_2 x - 2 = 0 \Rightarrow \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$. $\log_3 y = 2 \Rightarrow y = 9$. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{-2x}{(x^2+1)(x^2+2)}$. **5p**
1. b)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. **2p** $f(0) = \ln 2$, din tabelul de variație $\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe $[0,\infty)$. **3p**
1. c)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (\ln(x^2+2) - \ln(x^2+1)) =$ **2p** $= \lim\limits_{x\to\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1} = \ln 1 = 0$. **3p**
2. a)	$\int_1^e x\left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \int_1^e \frac{x}{x^2}dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln e\Big\rvert_1^e = 1$. **5p**
2. b)	Fie F - primitiva funcției f, deci $F'(x) = f(x)$, $F'(x) = \frac{2x}{x^2 \cdot (x+1)^2} > 0$, $(\forall) x > 0$, **3p** deci F este crescătoare pe $(0,\infty)$. **2p**
2. c)	$\int_1^2 f(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2}\Big\rvert_1^2 =$ **3p** $= \frac{f^2(2) - f^2(1)}{2} = \frac{-22}{81}$. **2p**

TESTUL 29

Subiectul I.

1.	$f(f(1))=f(-2)=-5$. **5p**
2.	$2^x=t>0\Rightarrow t^2-6t+8=0$. $t_1=2\Rightarrow x_1=1$. $t_2=4\Rightarrow x_2=2$. **5p**
3.	$a_2+a_5=19$. $a_1+r+a_1+4r=19$. $2a_1+5r=19\Rightarrow a_1=2$. $a_{10}=a_1+9\cdot r=29$. **5p**
4.	$A_6^4=360$. Numărul funcțiilor injective este 360. **5p**
5.	M mijlocul lui $[BC]$, $[AM]$ mediană în ΔABC. Observăm că ΔABC este dreptunghic în A. Deci $AM=\frac{BC}{2}=\frac{26}{2}=16$. **5p**
6.	$\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{2}{a}=\frac{a-1}{1}\Leftrightarrow 2=0$. $a_1=-1, a_2=2$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	Prin calcul direct. **5p**
1. b)	$B(a)+B(b)=\begin{pmatrix}2&0&a+b\\0&2&0\\3(a+b)&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&\frac{a+b}{2}\\0&1&0\\\frac{3(a+b)}{2}&0&1\end{pmatrix}=2B\left(\frac{a+b}{2}\right)$. **5p**
1. c)	$B(x^2+1)\cdot B(x)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+1\\0&1&0\\3x^2+3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x^3+3x+1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3x^2+3x+3&0&3x^3+3x+1\end{pmatrix}$. $B(x^2+x+1)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3x^2+3x+3&0&1\end{pmatrix}$ $B(x^2+1)\cdot B(x)=B(x^2+x+1)\Leftrightarrow 3x^3+3x+1=1\Rightarrow 3x(x^2+1)=0\neq 0\Rightarrow x=0$. **5p**
2. a)	$f(2)=2^3-3\cdot 2^2+2\cdot a-2=8-12+2a-2=2a-6=2(a-3)$. **5p**
2. b)	$X^2-X+1 \mid f\Rightarrow a=3$. **5p**
2. c)	Pentru $a=3$, $f=(X-2)(X^2-X-1)\Rightarrow f(2^x)=0$. $(2^x-2)\cdot(2^{2x}-2^x+1)=0$. $2^x-2=0$, $x=1$. $2^{2x}-2^x+1=0$, $2^x=t>0$. $t^2-t+1=0$, $\Delta=-3<0$, soluție $x=1$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$. **5p**
1. b)	Ecuația tangentei în $A(1,f(1))$ este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$. $x-y+\ln 2-1=0$. **5p**
1. c)	$f'(x)=0$, $x=0$. Pe $(-\infty;0]$, f strict descrescătoare. Pe $[0,\infty)$, f strict crescătoare. **5p**
2. a)	$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{9+\cos^2 x}dx$. $\cos x=t\Rightarrow \int_1^{\frac{1}{2}}\frac{-dt}{9+t^2}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{t^2+9}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3}{19}$. **5p**
2. b)	f_n crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$. $0\le x\le\frac{\pi}{3}\Rightarrow 0\le f_n(x)\le f_n\left(\frac{\pi}{3}\right), n\in\mathbf{N}^*$. **5p**
2. c)	Integrând relația de la b) obținem $0\le I_n\le\left[f_n\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\frac{\pi}{3}, n\in\mathbf{N}^*$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\Rightarrow$ folosind criteriul cleștelui că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$. **5p**

TESTUL 30

Subiectul I.

1.	$f(f(-1)) = f(3) = 11$. **5p**
2.	$4^x = t > 0$. $t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 1$. $t_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 0$. **5p**
3.	$T_4 = T_{3+1} = C_9^3(\sqrt{x})^6 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = 84$. **5p**
4.	Fie $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$. $x + iy + 2(x - iy) = -3 - 5i$. $3x - iy = -3 - 5i \Rightarrow x = -1, y = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow z = -1 + 5i$. **5p**
5.	Observăm că ΔABC este triunghi dreptunghic în A. $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$ cm^2. **5p**
6.	$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \sin^4 a + \cos^4 a + 2\sin^2 a \cos^2 a = 1$. Calcul direct. Dar $\sin 2a = \frac{1}{2}$. $2 \sin a \cos a = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin a \cos a = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ **5p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = m^2 + 1 + 1 + m + m + 1 = -m^2 + 2m + 3$. (S) are soluție unică $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbf{R} - \{-1, 3\}$. **5p**
1. b)	Pentru $m = -1$, $S = \left\{\left(a; \frac{1}{2} - a; -\frac{3}{2}\right) \mid a \in \mathbf{R}\right\}$. Deci pentru $m = -1 \Rightarrow (S)$ compatibil nedeterminat (are o infinitate de soluții). **5p**
1. c)	Pentru $m = 3$, $\det A = 0$. $\Delta_p = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, $r(A) = 2$. $\Delta_c = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(\overline{A}) = 3$. $r(A) = 2 \neq 3 = r(\overline{A}) \Rightarrow (S)$ incompatibil (nu are soluții). **5p**
2. a)	Prin calcul direct. **5p**
2. b)	$(n-3)(n-3) + 3 = 12$. $(n-3)(n-3) = 9 \Rightarrow (n-3)^2 = 9 \Rightarrow n - 3 = 3$ sau $n - 3 = -3$. $n = 6$, $n = 0$. **5p**
2. c)	Observăm că $x * 3 = 3 * y = 3, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$. $\sqrt{1} * \sqrt{2} * \ldots * \sqrt{2017} = \sqrt{1} * \sqrt{2} * \ldots * \sqrt{8} * \sqrt{9} * \ldots * \sqrt{2017} =$ $= a * \sqrt{9} * b = a * 3 * b = 3 * b = 3$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x(x-1)} = 1$. **5p**
1. b)	$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$. **5p**
1. c)	$f'(2) = \frac{4 - 2 \cdot 2 - 1}{(2-1)^2} = -1$. Ecuația tangentei în $A(2, f(2))$ la Gf este $x + y - 4 = 0$. **5p**
2. a)	$I_0 = e - 1$. $I_1 = \int_0^1 x(e^x)' dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (x)' e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - e^1 + e^0 = 1$. **5p**
2. b)	$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}(e^x)' dx = x^{n+1} e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n e^x dx = e - (n+1) I_n$. **5p**
2. c)	$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} I_n = 0$. **5p**

TESTUL 31

Subiectul I.

1.	f inversabilă $(\exists) f^{-1}:(1,\infty)\to(0,\infty)$. **2p** $f(x)=2$ și $x>0\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow f^{-1}(2)=1$. **3p**
2.	$z=\frac{5-10i}{25}\Rightarrow \mathrm{Re}(z)=\frac{1}{5}$. **5p**
3.	$(b_1)>0\Rightarrow \frac{1}{q^2}=\frac{1}{4},(\forall)n\in\mathbf{N}^*$. $q^2=4\Rightarrow q=2$, $b_1=1\Rightarrow S_6=b_1\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right)=63$. **5p**
4.	$P=\frac{\text{număr de cazuri favorabile}}{\text{număr de cazuri posibile}}=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$. **5p**
5.	$C(7,1)$. **5p**
6.	Observăm că $\cos x\neq 0$. **1p** Prin împărțire cu $\cos^2 x$ ecuația devine $\begin{array}{l|l}\mathrm{tg}^2x-\mathrm{tg}x-2=0 & t^2-t-2=0\\ \mathrm{tg}x=t & \Delta=9\end{array}\Rightarrow \mathrm{tg}x=2\Rightarrow x\in\{\mathrm{arctg}\,2+k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$ sau $\mathrm{tg}x=-1\Rightarrow x\in\{\mathrm{arctg}(-1)+k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$. $S=\{\mathrm{arctg}2+k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\right\}$. **4p**

Subiectul II.

1. a)	$\det X(1)=2$. **5p**
1. b)	Prin calcul direct. **5p**
1. c)	Prin inducție matematică. **5p**
2. a)	$I_2\in G$ pentru $a=1$ și $b=0$. **5p**
2. b)	Fie $A_1=\begin{pmatrix}a_1 & 2b_1\\ b_1 & a_1\end{pmatrix}\in G, A_2=\begin{pmatrix}a_2 & 2b_2\\ b_2 & a_2\end{pmatrix}\in G, a_1,b_1\in\mathbf{Z}, a_1^2-2b_1^2=1\Leftrightarrow \det A_1=1$. **1p** $a_2,b_2\in\mathbf{Z}, a_2^2-2b_2^2=1\Leftrightarrow \det A_2=1$. **1p** $A_1\cdot A_2=\begin{pmatrix}a_1a_2+2b_1b_2 & 2(a_1b_2+a_2b_1)\\ a_2b_1+a_1b_2 & a_1a_2+2b_1b_2\end{pmatrix}\in G$ și $\det(A_1\cdot A_2)=\det A_1\cdot\det A_2=1$. **3p**
2. c)	Observăm că $B=\begin{pmatrix}3 & 2\cdot 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\in G$. **2p** Din b) $\Rightarrow B^2\in G, B^3\in G,\ldots, B^p\neq B^q$ pentru $p\neq q\Rightarrow G$ are o infinitate de elemente. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty\Rightarrow$ nu există asimptote orizontale. **1p** Fie $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ și $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0\Rightarrow y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$. **2p** Analog $y=-x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$. **2p**
1. b)	$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Pe $(-\infty;0]$ f strict descrescătoare. Pe $[0,\infty)$ f strict crescătoare. **5p**
1. c)	$f'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $f(1)=\sqrt{2}$. **2p** $y-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)\Rightarrow x-\sqrt{2}y+1=0$. **3p**
2. a)	$I_1=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\frac{\ln^2(x+1)}{2}=\frac{\ln^2 2}{2}$. **5p**
2. b)	Cum $x^{n+1}\le x^n,(\forall)x\in[0,1]\Rightarrow\int_0^1\frac{\ln(x^{n+1}+1)}{x+1}dx\le\int_0^1\frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx\Rightarrow I_{n+1}<I_n, n\ge 1$. **5p**
2. c)	$\ln(x^n+1)\le x^n\Rightarrow\frac{\ln(x^n+1)}{x+1}\le\frac{x^n}{x+1}\le x^n,(\forall)x\in[0,1]$. **2p** $\int_0^1\frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx\le$ $\le\int_0^1 x^n dx\Rightarrow I_n\le\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1\Rightarrow I_n\le\frac{1}{n+1}$, dar $0\le I_n\Rightarrow\begin{array}{c}0\le I_n\le\frac{1}{n+1}\\ \searrow\ 0\ \swarrow\end{array}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$. **3p**

TESTUL 32

Subiectul I.

1.	$a_6 = a_1 + 5r$, $a_9 = a_1 + 8r$, $a_{12} = a_1 + 11r$. $a_{15} = a_1 + 14r$. **2p** $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 4a_1 + 38r \Rightarrow 4a_1 + 38r = 30 \mid :2 \Rightarrow 2a_1 + 19r = 15$ $S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = (a_1 + a_1 + 19r) \cdot 10 = (2a_1 + 19r) \cdot 10 = 15 \cdot 10 = 150$. **3p**
2.	$Gf \cap Ox$ în două puncte distincte $\Leftrightarrow \Delta > 0$. $\Delta = 9 - 4m$. $m \in \left(-\infty; \frac{9}{4}\right)$. **5p**
3.	Pentru $n = 1$. *Adevărat.* Pentru $n = 2$. *Adevărat.* Pentru $n = 4$. *Fals.* Pentru $n = 8$. *Fals.* **3p** $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. **2p**
4.	$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow 2 \cdot 9 + (-3) \cdot 6 = 0 \Leftrightarrow 18 - 18 = 0$. *Adevărat.* **5p**
5.	Observăm că ΔABC este dreptunghic în A (cu reciproca lui *T.* lui *Pitagora*). $r = \frac{S}{p}, S = 24\,\text{cm}^2, p = 12, r = \frac{24}{12} = 2$ cm. **5p**
6.	Pentru $x \in [-3, \infty)$, notăm $\sqrt[4]{x+3} = t, t \geq 0$:Ecuația devine: $t^2 - t - 12 = 0 \Rightarrow t \in \{-3, 4\}$. Cum $t \geq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{x+3} = 4 \Rightarrow x = 253$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$A^2 = I_2$. **2p** $B^2 = I_2 \Rightarrow A^2 = B^2$. **3p**
1. b)	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}$. **2p** $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. **2p** $A \cdot B \neq B \cdot A$. **1p**
1. c)	$A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A$. $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I_2$. **1p** Se demonstrează prin inducție matematică, că $A^{2n+1} = A$, $A^{2n+2} = I_2, (\forall) n \in \mathbf{N}$. **2p** $A + A^2 + A^3 + A^4 + \ldots + A^{2017} + A^{2018} = A + I_2 + A + I_2 + \ldots + A + I_2 = 1009A + 1009I_2 =$ $= 1009(A + I_2) = 1009\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2018 & 0 \\ 5045 & 0 \end{pmatrix}$. **2p**
2. a)	Prin calcul direct. **5p**
2. b)	$(x * x) * x = 4(x-3)^3 + 3 \Rightarrow 4(x-3)^3 + 3 = 3 \Rightarrow (x-3)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 3$. **5p**
2. c)	Fie $x = \frac{1}{2} \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$, trebuie găsit și un $y \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$,astfel încât $\frac{1}{2} * y = 0 \in \mathbf{Z}. \Rightarrow y = \frac{18}{5}$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x(2x^2+3)}{(x^2+1)^2(x^2+2)^2}$. **5p**
1. b)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{1}{2}, (\forall) x \in \mathbf{R}$. **5p**
1. c)	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$. Asimptotă orizontală spre ∞. **5p**
2. a)	$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$. **2p** $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2x+3}dx = \frac{x}{2}\Big|_0^1 - \frac{3}{2}I_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\ln\frac{5}{3}$. **3p**
2. b)	$2I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{2x^{n+1}}{2x+3}dx + \int_0^1 \frac{3x^n}{2x+3}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$. **5p**
2. c)	Din $x^n \geq x^{n+1}, (\forall) x \in [0,1] \Rightarrow \frac{x^n}{2x+3} \geq \frac{x^{n+1}}{2x+3}, (\forall) x \in [0,1]$. **2p** $I_n \geq I_{n+1}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$. $\frac{1}{n+1} = 2I_{n+1} + 3I_n \leq 5I_n \Rightarrow I_n \geq \frac{1}{5(n+1)}$ și $I_{n+1} \leq \frac{1}{5(n+1)}$. $n \to n-1, (\forall) n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow I_{n-1+1} \leq \frac{1}{5(n-1+1)} \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{5n}$. Deci $\frac{1}{5(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{5^n} \mid \cdot n, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$. $\frac{n}{5n+5} \leq nI_n \leq \frac{n}{5n} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} nI_n = \frac{1}{5}$. **3p**

TESTUL 33

Subiectul I.

1.	$z_1+z_2=3\in\mathbf{R}$. **5p**
2.	$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(8)=6$. **5p**
3.	$x_1+x_2=6, x_1x_2=3$. $2(x_1+x_2)-4x_1x_2=2\cdot 6-4\cdot 3=12-12=0$. **5p**
4.	$\overline{ab}\in\{11,22,33,44,55,66,77,88,99\}$ divizibile cu 11. **3p** $P=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$. **2p**
5.	$d: y=5x-1\Rightarrow m_d=5$. $d'\parallel d$ cu $A\in d'\Rightarrow md'=md=5$. **2p** $d': 5x-y-7=0$. **3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\sin A}{2}$. **2p** $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=12\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ cm^2. **3p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A=0$. **5p**
1. b)	$\Delta p=3-4=-1\neq 0, r(A)=2$. **2p** $S=\{(a,-2a,a)\mid a\in\mathbf{C}\}$. **3p**
1. c)	$x_0^2+y_0^2+z_0^2=24\Leftrightarrow a^2+4a^2+a^2=24$. $a=\pm 2$. **2p** Pentru $a=2\Rightarrow x_0=2, y_0=-4, z_0=2$. **2p** Pentru $a=-2\Rightarrow x_0=-2, y_0=4, z_0=-2$. **1p**
2. a)	$1+a+b=0$ și $f(-2)=3\Leftrightarrow -8-2a+b=3$. **2p** $f=x^3-4x+3$. **3p**
2. b)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=0-2(-4)=8$. **5p**
2. c)	$f=x^3+3x+3$. $q=x-1$. $r=3x+4$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-1}{x(x+1)}=\frac{-1}{x(x+1)}$. **5p**
1. b)	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{\ln(n^2+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\ldots+\ln(n+1)-\ln n}{\ln(n^2+1)}=\frac{1}{2}$. **5p**
1. c)	$f'(x)<0, (\forall)x\in(0,\infty)\Rightarrow f$ strict descrescător $\Rightarrow f$ injectivă, dar f continuă și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\Rightarrow f((0,\infty))=(0,\infty)\Rightarrow f$ surjectivă. Deci f bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă. **2p** $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$, unde $y_0=f(x_0)\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_0)=\ln 2\Rightarrow \ln\frac{x_0+1}{x_0}=\ln 2\Rightarrow x_0=1\Rightarrow (f^{-1})'(\ln 2)=\frac{1}{f'(1)}=-2$. **3p**
2. a)	$I_1=\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{6}$. **5p**
2. b)	Se demonstrează că $0\le x-x^2\le\frac{1}{4}, (\forall)x\in[0,1]\Rightarrow$ $\Rightarrow 0\le(x-x^2)^n\le\frac{1}{4^n}\Rightarrow 0\le\int_0^1(x-x^2)^n dx\le\frac{1}{4^n}, (\forall)x\in[0,1], n\in\mathbf{N}^*$. **5p**
2. c)	$I_n=\int_0^1 x'(x-x^2)^n dx=x(x-x^2)^n\mid_0^1-\int_0^1 x\cdot n(x-x^2)^{n-1}\cdot(1-2x)dx=$ $=-2n\int_0^1(x-x^2)^n dx+n\int_0^1(x-x^2)^{n-1}\cdot x dx$. Deci: $I_n=-2nI_n+nJ_n$. **1p** Unde $J_n=\int_0^1 x(x-x^2)^{n-1}dx$. $1-x=t\Rightarrow -dx=dt$. $x_1=0\Rightarrow t_1=1$. $x_2=1\Rightarrow t_2=0$. $\int_0^1(1-t)(t-t^2)^{n-1}(dt)=\int_0^1(t-t^2)^{n-1}dt-\int_0^1 t(t-t^2)^{n-1}dt=$ $=I_{n-1}-J_n\Rightarrow J_n=I_{n-1}-J_n$. $J_n=\frac{1}{2}I_{n-1}$. $(2n+1)I_n=\frac{n}{2}I_{n-1}$. **2p** $I_n=\frac{n}{2(2n+1)}I_{n-1}, (\forall)n>2, n\in\mathbf{N}^*$. $I_n=\frac{2n}{4(2n+1)}I_{n-1}, (\forall)n\in\mathbf{N}^*, n>2$. **2p**

TESTUL 34

Subiectul I.

1.	$a=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2;\ b=\log_2^{16}=4.\ m_a=\frac{a+b}{2}=3.$ **5p**
2.	$y\min=\frac{-\Delta}{4a};\ \Delta=16-4\cdot6\cdot1=16-24=-8.\ y\min=\frac{(-8)}{4}=\frac{8}{4}=2.$ **5p**
3.	Notăm $3^x=t>0,\ t^2-4t+3=0,\ t_1=1,\ t_2=3.\ 3^x=1\Rightarrow x_1=0.\ 3^x=3\Rightarrow x_2=1.$ **5p**
4.	După micșorarea cu 10% $\Rightarrow p_1=300-30=270,\ p_2=270-13,5=256,5.$ **5p**
5.	$x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos x>0.\ \sin^2x+\cos^2x=1\Rightarrow\frac{9}{25}+\cos^2x=1\Rightarrow\cos x=\frac{4}{5}.$ **2p** $\cos x+\sin 2x=\cos x+2\sin x\cos x=\frac{4}{5}+2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{\frac{5}{4}}{5}+\frac{24}{25}=\frac{44}{25}.$ **3p**
6.	Fie M mijlocul lui $[BC]$, $M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)\Rightarrow M(1,5).$ **2p** $AM:\ x+y-6=0.$ **3p**

Subiectul II.

1. a)	$\det M(4)=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=4-1=3.$ **5p**
1. b)	$a\in\mathbf{R},\ \det M(a)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2a-6&1\\1&2a-6\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(2a-6)^2=1\Rightarrow 2a-6=1,\ 2a=7,\ a=\frac{7}{2}$ sau $2a-6=-1,\ 2a=5,\ a=\frac{5}{2}.$ **5p**
1. c)	$M^2(a)=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2a-6&1\\1&2a-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a-6&1\\1&2a-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$ **2p** $\Leftrightarrow\begin{pmatrix}(2a-6)^2+1&2a-6+2a-6\\2a-6+2a-6&(2a-6)^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}(2a-6)^2=0\\4a-12=0\end{vmatrix}\Rightarrow a=3.$ **3p**
2. a)	Prin calcul direct. **5p**
2. b)	$x*x=4\Leftrightarrow 2(x-2)^2+4=4.$ **2p** $2(x-2)^2=0\Rightarrow x-2=0,\ x=2.$ **3p**
2. c)	Observăm că $x\circ 2=2,\ 2*x=2,\ (\forall)x\in\mathbf{R}$ **3p** și "$*$" asociativă (se demonstrează). Deci $1*\sqrt{2}*\sqrt{3}*\sqrt{4}*\sqrt{5}*\ldots*\sqrt{2017}=a*2*b=2*b=2.$ **3p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=e^x+1.$ **5p**
1. b)	$f''(x)=e^x>0,(\forall)x\in\mathbf{R}\Rightarrow f$ strict convexă pe $\mathbf{R}.$ **5p**
1. c)	$f'(1)=e+1.$ **1p** Ecuația tangentei în $A(1,f(1))$ la Gf: $y-f(1)=f'(1)(x-1).\ f(1)=e+1+1=e+2.\ y-(e+2)=(e+2)(x-1)$ $y-ex-x-1=0.\ y-(e+1)x-1=0$, ecuația tangentei în $A(1,f(1))$ la $Gf.$ **4p**
2. a)	$\int_1^2(x^2+2e^x+5)dx=\int_1^2x^2dx+2\int_1^2e^xdx+5\int_1^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_1^2+2e^x\Big\vert_1^2+5^x\Big\vert_1^2=$ **2p** $=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}+2(e^2-e)+5(2-1)=\frac{7}{3}+2e^2-2e+10-5=2e^2-2e+\frac{22}{3}.$ **3p**
2. b)	F derivabilă pe $\mathbf{R}.\ F'(x)=(\frac{x^3}{3})'+(5x)'+2(e^x)'\Rightarrow F'(x)=x^2+2e^x+5=f(x),(\forall)x\in\mathbf{R}.$ **5p**
2. c)	$\int(xf(x)-2xe^x)dx=\int[x(x^2+2e^x+5)-2xe^x]dx=\int x^3dx+5\int xdx=\frac{x^4}{4}+\frac{5x^2}{2}+\mathscr{C}.$ **5p**

TESTUL 35

Subiectul I.

1.	$\sqrt[3]{64}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\log_2 16=4+2+4=10$. **5p**
2.	$y\min=\frac{-\Delta}{4a};\ \Delta=(-3)^2-4\cdot(-5)=29.\ y\min=\frac{-29}{4}$. **5p**
3.	$z=\frac{12+4i+6i-2}{16+4}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$. **3p** $\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$. **2p**
4.	$P_6=6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$ de moduri. **5p**
5.	$m_d=\frac{-a}{b}=\frac{-3}{(-1)}=3$. **1p** Fie $d'\parallel d$, astfel încât $A\in d'$. $m_{d'}=m_d=3,\ y-y_A=m_{d'}(x-x_A)$. **2p** $d':y-2=3(x-1)\Leftrightarrow 3x-y-1=0$. **2p**
6.	$\sin^2 x+\cos^2 a=1\Leftrightarrow \sin^2 a+\frac{9}{25}=1$. **2p** $\sin^2 a=\frac{16}{25},\ a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin a=\frac{4}{5}$. **2p** $\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$. **1p**

Subiectul II.

1. a)	$\det B=-1$. **5p**
1. b)	$A\cdot B-B\cdot A=O_2$. **5p**
1. c)	$B+x\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2x & 1\\ 2x & 1 & 2x\\ 1 & 2x & 0\end{pmatrix}$. **2p** $\det(B+x\cdot A)=$ $=0+4x^2+4x^2-1-0-0=8x^2\Rightarrow 8x^2=2\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$. **3p**
2. a)	$x*2=2,2*x=2,(\forall)x\in\mathbf{R}$. **5p**
2. b)	$(\exists)e\in\mathbf{R}$, astfel încât $(\forall)x\in\mathbf{R}.\ e*x=x*e=x\Rightarrow e=3$. **5p**
2. c)	$0*1*2*3*\ldots*2018=a*2*b=2$, deoarece $a*2=2$ și $2*b=2,(\forall)a,b\in\mathbf{R}$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2-5}{x^2+5}\right)^{x^2}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-10}{x^2+5}\right)^{\frac{x^2+5}{-10}}\right]^{\frac{-10x^2}{x^2+5}}=-10$. **5p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$. **1p** Dar $f'(x)=f'(x)=\frac{20x}{(x^2+5)^2},(\forall)x\in\mathbf{R}$. **2p** $\Rightarrow f'(0)=0$. **2p**
1. c)	$f''(x)=\frac{-60x^2+100}{(x^2+5)^3}$. **1p** $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2=\frac{10}{6}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$. **1p** f convexă pe $\left[\frac{-\sqrt{15}}{3},\frac{\sqrt{15}}{3}\right]$. **3p**
2. a)	$\int_0^1(x^2+5x+2)dx=\frac{x^3}{3}\Big\|_0^1+\frac{5x^2}{2}\Big\|_0^1+2x\Big\|_0^1=\frac{2}{1}\frac{3}{3}+\frac{5}{2}+\frac{6}{2}=\frac{2+15+12}{6}=\frac{29}{6}$. **5p**
2. b)	$g(x)=x^2$. $V=\pi\int_0^1(x^2)^2dx=\pi\cdot\int_0^1x^4dx=\pi\cdot\frac{x^5}{5}\Big\|_0^1\Rightarrow V=\frac{\pi}{5}$. **5p**
2. c)	$\int_0^1 x'\ln(f(x))dx=x\ln f(x)\Big\|_0^1-\int_0^1\frac{2x^2+5x}{x^2+5x+10}dx$ etc. **5p**

TESTUL 36

Subiectul I.

1.	$z=-4\in\mathbf{R}$. **5p**
2.	$f(3)=3-3=0\Rightarrow f(0)f(1)f(2)f(3)\ldots f(10)=0$. **5p**
3.	$\log_2(5x-2)=3\Leftrightarrow 5x-2=2^3\Leftrightarrow 5x-2=8.\ 5x=10,\ x=2$. **5p** Condiția de existență este $5x-2>0\Rightarrow x\in\left(\frac{2}{5},\infty\right)$. Deci $x=2$ verifică condiția de existență.
4.	$S_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}=\frac{(3+21)\cdot 10}{2}=\frac{24\cdot 10}{2}=120$. **5p**
5.	$P_{\Delta ABC}=6+6\sqrt{3}+12=18+6\sqrt{3}=6(3+\sqrt{3})$ cm. **2p**
6.	$\vec{w}=-2\vec{i}+8\vec{j}$ **2p** $\Rightarrow\left\|\vec{w}\right\|=\sqrt{(-2)^2+8^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}.\ \left\|\vec{w}\right\|=2\sqrt{17}$. **3p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A(0)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -5 & 2\end{vmatrix}=4+5=9$. **5p**
1. b)	$A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ -5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 7\\ -35 & 7\end{pmatrix}$. **5p**
1. c)	$A(1)+A(2)+\ldots+A(10)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ -5 & 4\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}12 & 1\\ -5 & 12\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}3+4+\ldots+12 & 10\\ -50 & 3+4+\ldots+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}75 & 10\\ -50 & 75\end{pmatrix}$. **5p**
2. a)	$f(2)=8+8+2+2=20.\ f(-2)=-8+8-2+2=0.\ f(2)+f(-2)=20$. **5p**
2. b)	$x+2\mid f\overset{T.Bezout}{\Leftrightarrow}f(-2)=0$, dar $f(-2)=0$ (din punctul a)) $\Rightarrow f\vdots(x-2)$. **5p**
2. c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=4-2=2$. **2p** $x_1^3+x_2^3+x_3^3+2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_1+x_2+x_3)+6=0$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3+2\cdot 2-2+6=0$ **3p** $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-4+2-6=-8$.

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=3x^2-3.\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3\cdot 1^2-3=0$. **5p**
1. b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$. **2p** $f(1)=-2.\ y-(-2)=0(x-1)\Leftrightarrow y+2=0$. **3p**
1. c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow 3(x^2-1)=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 1$. **1p** $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -1 & & 1 & & \infty\\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & & \nearrow & \underset{\max}{2} & \searrow & \underset{\min}{-2} & \nearrow & \end{array}$ **2p** $f(-1)=-1+3=2.\ f(1)=1-3=-2$. Pe $(-\infty;-1]$ și pe $[1,\infty)\Rightarrow f$ strict crescătoare. Pe $[-1,1]\Rightarrow f$ strict descrescătoare. **2p**
2. a)	$\int_0^1\frac{xf(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}$. **5p**
2. b)	$I=\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int x'\sqrt{x^2+1}\,dx=I=x\sqrt{x^2+1}-\underbrace{\int\sqrt{x^2+1}\,dx}_{I}+\ln\left\|x+\sqrt{x^2+1}\right\|+\mathscr{C}$ **2p** $\Rightarrow$ $\Rightarrow 2I=x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\mathscr{C}\Rightarrow I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\mathscr{C}$. **3p**
2. c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. **5p**

TESTUL 37

Subiectul I.

1.	$(2x-1)^2=9 \Rightarrow x \in \{-1,2\}$. **5p**
2.	$4 \cdot C_5^3 - A_4^2 = \frac{4 \cdot 5!}{3! \cdot 2!} - \frac{4!}{2!} = 28$. **5p**
3.	Fie M mijlocul lui $[BC] \Rightarrow M(-1,3) \Rightarrow AM: x-3y+10=0$. **5p**
4.	$A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ de numere de 3 cifre distincte cu cifre din M. **5p**
5.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC \sin B}{2} = \frac{6 \cdot 8 \sin 60^\circ}{2} = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ cm^2. **5p**
6.	$f(2)+f(-2)=2^2+(-2)^2=4+4=8$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A = 20$. **5p**
1. b)	$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 26 \\ 10 & -4 & 20 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}$. **5p**
1. c)	$\det A = 20 \neq 0 \Rightarrow (\exists) A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{4} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$. **5p**
2. a)	$(\exists) e \in \mathbf{R}$, astfel încât $(\forall) x \in \mathbf{R}, e*x=x*e=x \Rightarrow e=\frac{5}{2}$. **5p**
2. b)	Prin calcul direct. **5p**
2. c)	Prin inducție matematică. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = \frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$. **5p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$, dreapta $y=1$, este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la Gf. **5p**
1. c)	$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x=0 \Rightarrow x=0$. **1p** $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & \infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & \searrow & & \underset{\min}{-1} & \nearrow & \frac{3}{5} \nearrow \end{array}$ **2p** Pe $[0,2]$ f strict crescătoare, deci pentru $0 \le x \le 2 \Rightarrow f(0) \le f(x) \le f(2)$, adică $-1 \le f(x) \le \frac{3}{5}$. **2p**
2. a)	$\int_0^1 x(e^x)dx = xe^x\Big\|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^1 - e^x\Big\|_0^1 = 1$. **5p**
2. b)	$\int (x^2e^x - xe^x)dx = \int (x^2-x)e^x dx = (x^2-x)e^x - \int (2x-1)e^x dx =$ $= (x^2-x)e^x - (2x-1)e^x + 2\int e^x dx = (x^2-x-2x+1+2)e^x + \mathscr{C} = (x^2-3x+3)e^x + \mathscr{C}$. **5p**
2. c)	$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n e^x dx \ge \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1 = \frac{1}{n+1}$. **5p**

TESTUL 38

Subiectul I.

1.	$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(-1)=-3$. **5p**
2.	$2\cdot(2-5\sqrt{2})+10\sqrt{2}=6-10\sqrt{2}+10\sqrt{2}=6$. **5p**
3.	$3=\frac{x+2x+9}{2}\Leftrightarrow 6=3x+9\Leftrightarrow 3x=-3\Rightarrow x=-1$. **5p**
5.	Ecuația dreptei AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 3x+5+2y-6-5x-y=0.\ -2x+y-1=0$. **5p**
6.	$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\ \cos A=\frac{8^2+5^2-9^2}{2\cdot 8\cdot 5}=\frac{64+25-81}{80}=\frac{89-81}{80}.\ \cos A=\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A(1)=\begin{vmatrix} 2 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix}=10$. **5p**
1. b)	$A(0)\cdot A(3)=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 27\\ 0 & 25\end{pmatrix}$. **5p**
1. c)	$\det(A(2))=10\neq 0\Rightarrow (A(2))^{-1}$ există și $A(2)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$. **5p**
2. a)	$q=X+1,\ r=2$. **5p**
2. b)	$X-1\mid f\overset{T.Bezout}{\Leftrightarrow} f(1)=0\Rightarrow m+3=0,\ m=-3$.**5p**
2. c)	Pentru $m=2, f=X^3+X^2+X+2$. $x_1+x_2+x_3=-1;\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1,\ x_1x_2x_3=-2$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=(-1)^2-2\cdot 1=1-2=-1$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=\frac{2x-2}{x}$. **5p**
1. b)	$f(1)=2;\ f'(1)=0$. Ecuația tangentei în $A(1,2)$ la Gf este $y-2=f'(1)(x-1).\ y-2=0$. **5p**
1. c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x-2}{x}=0\Rightarrow 2x-2=0,\ x=1$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & \infty\\ \hline f'(x) & \| & --- & 0 & +++ & \\ f(x) & \| & \searrow & \underset{\min}{2} & \nearrow & \end{array}$ $f(x)\geq 2,(\forall)x\in(0,\infty),\ 2x-2\ln x\geq 2\ \vert:2\Rightarrow x\geq\ln x+1,(\forall)x\in(0,\infty)$. **5p**
2. a)	$\int_0^1\frac{(x^2+1)e^x}{e^x}dx=\int_0^1(x^2+1)dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1+x\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$.**5p**
2. b)	$\int(x^2+1)e^xdx=(x^2+1)e^x-2\int xe^xdx=(x^2+1)e^x-2(xe^x-e^x)+\mathscr{C}=$ $=(x^2-2x+3)e^x+C,\ F(0)=1.\ 3\cdot e^0+C=1\Rightarrow 3+C=1\Rightarrow C=-2$. Deci $F(x)=(x^2-2x+3)e^x-2$ este primitiva cerută. **5p**
2. c)	$\int_0^1(x^2+1)e^xdx=(x^2+1)e^x\Big\vert_0^1-2\int_0^1xe^xdx=2e-e^0-2(xe^x\Big\vert_0^1-\int_0^1e^xdx)=$ $=2e-1-2(e-e^x\ \vert_0^1)=2e-3$. **5p**

TESTUL 39

Subiectul I.

1.	$x \in [7, 8)$. **5p**
2.	$\Delta \le 0 \Leftrightarrow 4 - 4m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 1$. **5p**
3.	$\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$. **1p** Ecuația devine $2\cos^2 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 0$ **2p** cu soluțiile $\cos 3x = 0$ sau $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}\right\}$. **2p**
4.	$T_{k+1} = C_{20}^k \cdot 5^{\frac{20-k}{5}} 20^{\frac{k}{2}}$, $k = \overline{0,20}$. **2p** $T_{k+1} \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow k \in \{0, 10, 20\} \Rightarrow$ 3 termeni raționali. **3p**
5.	Fie M mijlocul segmentului $AC \Rightarrow z_M = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$ **1p** și N mijlocul segmentului $BD \Rightarrow$ $z_N = \frac{a+7}{2} + \frac{b+1}{2}i$ **1p** $ABCD$ paralelogram $\Leftrightarrow z_M = z_N$ **1p** $\Leftrightarrow a = -2$, $b = -1$. **2p**
6.	$4(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x + \cos^2 x = 5$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. $\det A = (a+2)(a-1)^2 \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbf{R} - \{-2, 1\}$.
1. b)	Pentru $a \in \mathbf{R} - \{-2, 1\} \Rightarrow$ sistemul este compatibil Determinat. $a = -2 \Rightarrow \text{rang}A = 2$, $d_{car} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este incompatibil. Pentru $a = 1 \Rightarrow \text{rang}A = \text{rang}\overline{A} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ sistem compatibil.
1. c)	$S = \{(1 - \alpha, \beta, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. **5p**
2. a)	Dacă $x \in G$ și $y \in G$, $\lvert x\rvert < 2$, $\lvert y\rvert < 2 \Rightarrow \lvert xy\rvert < 4 \Rightarrow xy + 4 > 0 \Rightarrow -2 < \frac{4x+4y}{xy+4} < 2$. **5p**
2. b)	$(\exists) e \in G$, astfel încât $(\forall) x \in G$, $x * e = e * x = x \Rightarrow e = 0 \in G$. **5p**
2. c)	$f(x * y) = \frac{2 + x * y}{2 - x * y} = \frac{2 + \frac{4x+4y}{xy+4}}{2 - \frac{4x+4y}{xy+4}} = \left(\frac{2+x}{2-x}\right)\left(\frac{2+y}{2-y}\right) = f(x) \cdot f(y), (\forall) x, y \in G$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x+1} - (x+1)\sqrt{x}}{x^2(x+1) - (x+1)^2 x} = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. **5p**
1. b)	$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x+1}} < 0 \Rightarrow f$ strict descrescătoare. **5p**
1. c)	$f(1) + \ldots + f(n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{3n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+1}}{-\sqrt{n+1}}} = e^{-\sqrt{3}}$. **5p**
2. a)	$\int_0^1 (x^{2017} + x + 1)dx = \left(\frac{x^{2018}}{2018} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Big\rvert_0^1 = \frac{3028}{2018}$. **5p**
2. b)	$f'(x) = 2017x^{2016} + 1 > 0 \Rightarrow f$ Injectivă. $\text{Im}f = (-\infty, +\infty) \Rightarrow f$ surjectivă. **5p**
2. c)	Cu schimbarea de variabilă $x = f(t)$, de unde $dx = f'(t)dt$. Dacă $x = 1 \Rightarrow t = 3$. Dacă $x = 3 \Rightarrow t = 1$, avem: $\int_1^3 g(x)dx = \int_1^3 f^{-1}(x)dx = \int_3^1 t \cdot f'(t)dt = t \cdot f'(t)\Big\rvert_3^1 - \int_3^1 f(t)dt$, etc. **5p**

TESTUL 40

Subiectul I.

1.	$a_1+4r+a_1+7r+a_1+11r+a_1+16r=100 \Rightarrow 2a_1+19r=50 \Rightarrow S_{20}=25$. **5p**
2.	$z=(-2i)^{1009}+(2i)^{1008}\cdot(1+i)=2^{1008}(1-i) \Rightarrow \lvert z\rvert=2^{1008}\sqrt{2}$. **5p**
3.	$n=3$. **5p**
4.	Fie $d_1 \perp d$ cu $A \in d_1$. Cum $m_d=-\frac{3}{4} \Rightarrow m_{d_1}=\frac{4}{3}$ și $d_1: y-2=\frac{4}{3}(x-2)$. Cum $\{B\}=d_1 \cap d_2 \Rightarrow B\left(\frac{32}{25},-\frac{26}{25}\right)$. **5p**
5.	$T_{k+1}=C_8^k\left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{8-k}\cdot(-x^{-1})^k$, $k=\overline{0,8}$. $T_{k+1}=C_8^k x^{\frac{40-9k}{4}}\cdot(-1)^k . x^{\frac{40-9k}{4}}=x^1 \Rightarrow k=4 \Rightarrow$ $\Rightarrow T_5=C_8^4 x$. **5p**
6.	Numărul funcțiilor $g:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$ este 5^5. Pentru f avem 5^4 posibilități $\lvert z\rvert=\lvert 1-i\rvert^{2017}=\sqrt{2}^{2017}$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	Prin calcul direct. **5p**
1. b)	Prin inducție matematică. **5p**
1. c)	$512=2^9 \Rightarrow n=10$. **5p**
2. a)	$x \in \{\hat{2},\hat{5}\}$. **5p**
2. b)	$\mathrm{Im} f=\{\hat{0},\hat{2},\hat{3},\hat{5}\}$. **5p**
2. c)	Cum $x^3=x, (\forall)x \in \mathbf{Z}_6$, deducem card $H=6$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	Nu există asimptote verticale și orizontale. $y=x+m$ este ecuația asimptotei oblice la ∞. $y=-x-m$ este ecuația asimptotei oblice la $-\infty$.
1. b)	Prin calcul.
1. c)	Fie $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, g(x)=x^3-3x+m$. $g'(x)=0 \Rightarrow x=1$ sau $x=-1$. Ecuația are trei rădăcini reale și distincte dacă $m+2>0$ și $m-2<0$, de unde $m \in (-2,2)$.
2. a)	$\int_0^1 x\cdot\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\sqrt{4-x^2}\Big\rvert_0^1=2-\sqrt{3}$. **5p**
2. b)	$\int_0^1 f(x)\arccos\frac{x}{2}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\arccos\frac{x}{2}dx=\frac{-1}{2}\arccos^2\frac{x}{2}\Big\rvert_0^1=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{18}$. **5p**
2. c)	Cu schimbarea de variabilă $x=-t$ rezultă relația **5p**

TESTUL 41

Subiectul I.

1.	$7^{2\log_7 3}-3=7^{\log_7 9}-3=9-3=6$. **5p**
2.	$f(x)\geq m,(\forall)x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow x^2+mx+1\geq 0,(\forall)x\in\mathbf{R}$ **1p** $\Leftrightarrow m^2-4\leq 0$, **2p** $\Leftrightarrow m\in[-2,2]$. **2p**
3.	Pentru $x>0$ notăm $\lg x=t$. Ecuația $8t^2-3t-11=0$ are soluțiile $t_1=-1$, $t_2=\frac{11}{8}$ **3p** $\Rightarrow$ $\Rightarrow x\in\left\{10^{-1},\ 10^{\frac{11}{8}}\right\}$. **2p**
4.	Din cele 90 de numere de 2 cifre, 9 ai cifrele egale și 81 au cifre diferite. $P=\frac{81}{90}=\frac{9}{10}$. **5p**
5.	$m_{AB}\cdot m_d=-1$; **1p** $m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{1}{3}$ **1p** $\Rightarrow m_d=-3$ **1p** $\Rightarrow d: y=-3x$. **2p**
6.	$T_{k+1}=C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k$, $k=\overline{0,10}$. **2p** Termenul din mijloc este $T_6=T_{5+1}=C_{10}^5\frac{2^5}{3^{10}}$. **3p**

Subiectul II.

1. a)	$A\in H\Rightarrow A^{-1}=A^2+A$. **1p** Înmulțind la dreapta cu A, avem: $I_3=A^2+A$ **3p** $\Rightarrow$ $\Rightarrow A^2+A-I_3=0_3$. **1p**
1. b)	Matricea $B=P^{-1}\cdot A\cdot P\in H$, dacă $B^{-1}=B^2+B\Leftrightarrow(P^{-1}\cdot A\cdot P)^{-1}=$ $=(P^{-1}\cdot A\cdot P)^2+(P^{-1}\cdot A\cdot P)$ **2p** $\Leftrightarrow P^{-1}\cdot A\cdot P=P^{-1}\cdot A^2\cdot P+P^{-1}\cdot A\cdot P$ **1p** $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P^{-1}(A^2+A)P=P^{-1}\cdot A^2\cdot P+P^{-1}\cdot A\cdot P$ adevărat **2p**
1. c)	$aI_3\in H\Leftrightarrow(aI_3)^{-1}=(aI_3)^2+aI_3$ **2p** $\Leftrightarrow\frac{1}{a}I_3=a^2I_3+aI_3$ **1p** $\Leftrightarrow a^3+a^2-1=0$, ecuație ce nu are soluții în $\mathbf{Q}^*$. **2p**
2. a)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)-2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4)=0$. Cum $x_i\neq 0,(\forall)i=\overline{1,4}$, deducem concluzia. **5p**
2. b)	$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=3(x_1+x_2+x_3+x_4)-4=-4$. **5p**
2. c)	Presupunem prin reducere la absurd că $(\exists)x_0\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$, pentru care $f(x_0)\in\mathbf{Z}$. Fie $f(x_0)=k$, $k\in\mathbf{Z}$. **2p** Deci polinomul $g=f-k$, $g\in\mathbf{Z}[X]$ admite o rădăcină $x_0\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$, unde $g=X^4-3X+1-k$, deoarece orice rădăcină x_0 rațională a lui g este de forma $\frac{\alpha}{\beta}$ cu $\alpha\mid(1-k)$ și $\beta\mid 1\Rightarrow\beta=\pm1$, adică $x_0\in\mathbf{Z}$. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$. **2p** Dar $f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}-\frac{2x}{x^2+1}$ **2p** $\Rightarrow f'(0)=0$. **1p**
1. b)	$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)(x^2+2)}$ **2p** $\Rightarrow$pentru $x\in(-\infty,0]$, $f'(x)\geq 0$, deci f este strict crescătoare, **2p** iar pentru $x\in[0,\infty)$, $f'(x)\leq 0$ de f este strict descrescătoare. **1p**
1. c)	$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2)\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}=\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}\right]^{\frac{x^2+2}{x^2+1}}\right)=$ **4p** $=\ln e=1$. **1p**
2. a)	$I_1=\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{2}{3}$. **5p**
2. b)	$I_n=\int_0^1 x'(1-x^2)^n dx=x(1-x^2)\Big\vert_0^1+n\int_0^1(1-x^2)^{n-1}\cdot 2x^2dx=$ **2p** $=2n\int_0^1(1-x^2)^{n-1}(x^2-1+1)dx=$ **1p** $2n(I_{n-1}-I_n)$ **1p** $\Rightarrow I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1},(\forall)n\geq 2$. **1p**
2. c)	Din b), deducem că $I_n=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}$. **2p** Cum $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$. **3p**

TESTUL 42

Subiectul I.

1.	$\sqrt{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4}$. **5p**
2.	$V_m(x_m, y_m)$ se află în cadranul al doilea dacă $x_m < 0$ și $y_m > 0$. **2p** Avem $x_m = -\frac{3m-1}{2} < 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, $y_m = -\frac{5m^2-10m+1}{4} > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m \in \left(1-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$. **2p** Deci $m \in \left(\frac{1}{3}, 1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$. **1p**
3.	Pentru $x \in [1,4]$ prin ridicarea la pătrat avem soluția unică $x_1 = \frac{9-\sqrt{13}}{2}$. **5p**
4.	Fie $z = a+bi$, $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow 3(a-bi)+2(a+bi) = 1-i$ **2p** $\Rightarrow$ $\Rightarrow a = \frac{1}{5}$ și $b = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{5} + i$. **3p**
5.	$\mathcal{A}_{ADC} = \frac{AD \cdot AC \cdot \sin 120^\circ}{2} = 6\sqrt{3}$. **1p** $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos 120^\circ = 97 \Rightarrow AC = \sqrt{97}$. **2p** Distanța de la D la AC este $d(A, DC) = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{97}}$. **2p**
6.	$h_A = d(A, BC)$. **1p** $BC: y-1=0 \Rightarrow$ **2p** $d(A, BC) = \frac{\lvert 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 1 \rvert}{\sqrt{0+1}} = 3$.**2p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A = 3$. **5p**
1. b)	$f(aX) = A \cdot (aX) + (aX) \cdot A = a(AX + XA) = af(X)$. **5p**
1. c)	$f(X+Y) = A(X+Y) + (X+Y)A = AX + XA + AY + YA = f(X) + f(Y)$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = e^{2x}(2x^2 - 6x + 4)$; $f''(x) = e^{2x}(4x^2 - 8x + 2) \Rightarrow f''(1) = -2e^2$. **5p**
1. b)	$e = 2$. **5p**
1. c)	$m \leq -\frac{1}{2}$. **5p**
2. a)	$f(x+2\pi) = \arccos(\cos(x+2\pi)) = \arccos(\cos x) = f(x), (\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow 2\pi$ este o perioadă a funcției f. **5p**
2. b)	$f(0) = 0, f(\pi) = \arccos(\cos \pi) = \arccos(-1) = \pi \Rightarrow$ **1p** $\Rightarrow f(0) = f(2\pi) = f(n\pi) = \ldots = f(2016\pi) = 0$ și $f(\pi) = f(3\pi) = f(5\pi) = \ldots = f(2017\pi) = \pi$**2p** Rezultă $f(0) + f(\pi) + \ldots + f(2017\pi) = 1009\pi$. **2p**
2. c)	$F(2\pi) = \int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt$ **1p** cu schimbarea de variabilă $x = 2\pi - t$. **2p** $\int_{\pi}^{2\pi} \arccos(\cos t)dt = -\int_{\pi}^{0} \arccos(\cos x)dx = \frac{x^2}{2}\Big\rvert_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$. **2p**

TESTUL 43

Subiectul I.

1.	$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=16 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=16 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=14$. **5p**
2.	$\log_2^2(2x)+3\left(\log_2(2x)+1\right)=13$. **1p** $\log_2^2(2x)+3\log_2(2x)-10=0$. Notăm $\log_2(2x)=t$ **2p** $\Rightarrow$ $\Rightarrow t\in\{-5,+2\} \Rightarrow x\in\{2^{-6},2\}$. **2p**
3.	$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-1$. **1p** $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=4n+5$ **1p** $\Rightarrow a_{n+1}-a_n=6,(\forall)n\in\mathbf{N}^*$. **2p** Rezultă: șirul este o progresie aritmetică cu rația 6. **1p**
4.	Fie $D(a,b)\cdot \overrightarrow{AD}=(a-4)\bar{i}+(b-2)\bar{j}$ și $\overrightarrow{AB}=-6\bar{i}-\bar{j}$, iar $\overrightarrow{AC}=5\bar{i}-3\bar{j}$. **2p** Rația se mai scrie: $5(a-4)\bar{i}+5(b-2)\bar{j}=-12\bar{i}-2\bar{j}-15\bar{i}+9\bar{j}$. **2p** Obținem $a=-\frac{7}{5}; b=\frac{17}{5} \Rightarrow D\left(-\frac{7}{5},\frac{17}{5}\right)$. **1p**
5.	$T_{k+1}=C_8^k\left(x\sqrt[4]{x}\right)^{8-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k$, $k=\overline{0,8}$. $T_{k+1}=C_8^k x^{\frac{40-5k}{4}-k}\cdot(-1)^k$. **2p** Condiția devine $40-9k=4 \Rightarrow k=k \Rightarrow T_5=C_8^4 x$. **3p**
6.	$r=\frac{S}{P}$, **1p** unde $P=10$ și $S=\sqrt{10\cdot4\cdot4\cdot2}=8\sqrt{5}$ **3p** $\Rightarrow r=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **1p**

Subiectul II.

1. a)	$a=1 \Rightarrow (x,y,z)=(2,1,0)$. **5p**
1. b)	$\Delta=a-5 \Rightarrow (\forall)a\in\mathbf{R}\setminus\{5\}$ sistemul are soluție unică. **5p**
1. c)	Pentru $a=5$ sistemul este compatibil nedeterminat $\Rightarrow (\forall)a\in\mathbf{R}$, sistemul este copatibil, deci nu există $a\in\mathbf{R}$ care să verifice condiția. **5p**
2. a)	Prin calcul. **5p**
2. b)	$\left(\log_2 x+2\right)\left(\log_3 x+2\right)=0 \Rightarrow x\in\{2^{-2},3^{-2}\}$. **5p**
2. c)	Fie $x=\frac{1}{2}\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$. $x\circ y=\frac{y}{2}+1+2y+2=y\left(\frac{5}{2}\right)+3$. **2p** Pentru $y=\frac{2}{5}\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$ obținem $x\circ y=4\in\mathbf{N}$. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1+x\ln x}{x}$. Dar $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x=0$. **1p** Obținem $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty \Rightarrow x=0$ este asimptotă verticală la dreapta. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, deci nu avem asimptotă orizontală spre $+\infty$. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x\ln x}{x^2}=0$, deci nu există asimptotă orizontală spre ∞. **4p**
1. b)	$f(e)=\frac{1}{e}+1$, **1p** deci $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ **2p** avem: $\lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=\frac{e-1}{e^2}$. **2p**
1. c)	$f''(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}=\frac{2-x}{x^3}$ **3p** $\Leftrightarrow$ Pentru $x\in(0,2)$ funcția este convexă **1p** și pentru $x\in(2,\infty)$ funcția este concavă **1p** cu $x=2$ abscisa punctului de inflexiune.
2. a)	$\int_2^e x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_2^e=\frac{e^3-8}{3}$. **5p**
2. b)	$\int_e^{e^2} x^2\ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x\Big\vert_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{x^2}{3}dx=\frac{2e^6-e^3}{3}-\frac{x^3}{9}\Big\vert_e^{e^2}=\frac{2e^6-e^3}{3}-\frac{e^6-e^3}{9}=\frac{5e^6-2e^3}{9}$. **5p**

TESTUL 44

Subiectul I.

1.	Formulă pentru combinări. **1p** $n^2+2n-8=0$. **2p** $n=2$. **2p**
2.	$f(x)=g(x)$. **1p** $x^2+3n+2=0$. **2p** $A(-1,-1)$; $B(-2,0)$. **2p**
3.	$x^2-5x-36=0$. **2p** $x=9$, $x=-4$. **2p** Finalizare $x=9$. **1p**
4.	$x_A+x_C=x_B+x_D$; $y_A+y_C=y_B+y_D$. **2p** $m=-1$; $n=4$, **3p**
5.	Formulă pentru probabilitate, **2p** $P=\frac{44}{2012}$. **3p**
6.	$\cos a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3p** $a=\frac{5\pi}{6}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$. **2p** $\det(A)=(a-1)^2$. **3p**
1. b)	$\det(A)=0\Leftrightarrow a=1$. **1p** $a\neq 1$, rang$A=3$, pentru $a=1$, rang$=1$. **4p**
1. c)	$a\neq 1$, $\det A\neq 0$. **1p** $x=0$, $y=0$, $z=1$. **4p**
2. a)	$x\in G$, $y\in G$. **2p** $x*y\in G$. **3p**
2. b)	Definiție morfism. **1p** Demonstrație morfism. **2p** Demonstrație f bijectivă. **2p**
2. c)	$(x-4)^{2016}=1$. **4p** $x=3$, $x=5$. **1p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{-1}{x(x+1)}<0$. **4p** f descrescătoare pe $(0,\infty)$. **1p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=1$. **5p**
1. c)	$\lim\limits_{x\to\infty}(f(1)+f(2)+\ldots+f(n))=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(n+1)=\infty$. **5p**
2. a)	$I_1=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx-\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx$. **3p** $I_1=\ln 2-\frac{1}{2}$. **2p**
2. b)	$\int_0^1\frac{x^{n+2}}{(x+1)^2}dx+2\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^2}dx+\int_0^1\frac{x^n}{(x+1)^2}dx=\int_0^1 x^n dx$. **3p** Finalizare. **2p**
2. c)	Pentru $x\in(0,1)$, $0\leq I_n\leq\int_0^1 x^n dx$. **2p** $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$. **2p** Finalizare. **1p**

TESTUL 45

Subiectul I.

1.	5280. **5p**
2.	$m=3$; $A(3,5)$. **5p**
3.	Condiții de existență. **2p** $x=\pm 3\sqrt{2}$. **3p**
4.	$3\vec{u}-2\vec{v}=8\vec{i}+11\vec{j}$. **5p**
5.	$z=(1+2i)(3-4i)=11+2i$. **4p** $z=11$. **1p**
6.	Ecuația dreptei **2p** $x+y+2=0$. **3p**

Subiectul II.

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}$. **2p** $\det(A)=6$. **3p**
1. b)	$\det(A)=3+3m$. **3p** $m=-1$. **2p**
1. c)	$\det A=9$, **1p** $d_x=9$, $d_y=-9$, $d_z=0$, **2p** $x=1$, $y=-1$, $z=0$. **2p**
2. a)	$(\exists)e\in\mathbf{R}$, astfel încât $(\forall)x\in\mathbf{R}$, $e*x=x*e=x$ **2p** $\Rightarrow xe-3x-3e+12=x$ **1p** $\Rightarrow e=4$. **2p**
2. b)	$C_3^1=3$; $C_4^1=4$. **2p** $C_3^1*C_4^1=3$. **3p**
2. c)	$x^2-7x+5=0$. **3p** Finalizare. **2p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\dfrac{x'(x^2+x+1)-x(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$. **2p** $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$. **3p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. **4p** $y=0$ asimptotă orizontală către $\pm\infty$. **1p**
1. c)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1$. **5p**
2. a)	$I_0=\int_2^3\dfrac{1}{x^2-1}dx$. **2p** $\Rightarrow I_0=\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{x-1}{x+1}\right\rvert\Big\rvert_2^3=\dfrac{1}{2}\ln 2$. **3p**
2. b)	$I_1=\int_2^3\dfrac{x}{x^2-1}dx$. **2p** $I_1=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{8}{3}$. **3p**
2. c)	$\int_2^3\dfrac{x^{n+2}}{x^2-1}dx-\int_2^3\dfrac{x^n}{x^2-1}dx=\int_2^3 x^n dx$. **3p** $\Rightarrow I_{n+2}-I_n=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big\rvert_2^3=\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$. **2p**

TESTUL 46

Subiectul I.

1.	$n=\lvert\sqrt{5}-1\rvert-\lvert 2-\sqrt{5}\rvert=$ **2p** $=\sqrt{5}-1-\sqrt{5}+2=1\in\mathbf{N}$. **3p**
2.	$-\frac{\Delta}{4a}<0\Rightarrow\frac{-m-1}{m}<0$, **2p** $m\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$. **3p**
3.	Condiția de existență: $1-x>0\Rightarrow x\in(-\infty,1)$. **1p** $\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2(1-x)=1\Rightarrow\log_2 3\sqrt{1-x}=1\Rightarrow$ **2p** $3\sqrt{1-x}=2\Rightarrow x=\frac{5}{9}\in(-\infty,1)$. **2p**
4.	$\frac{n!}{(n-3)!}\le 6\cdot\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}\Rightarrow$ **2p** $n-2\le 3\Rightarrow n\le 5$, **2p** $n\in\mathbf{N}, n\ge 3\Rightarrow n\in\{3,4,5\}$. **1p**
5.	$G\left(\frac{8}{3},2\right)$. **5p**
6.	$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, **3p** $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A^2(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. **5p**
1. b)	$\begin{pmatrix}x+1&0&0\\0&x+1&0\\0&0&x+1\end{pmatrix}=(x+1)^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, **2p** $x^3+3x^2+x=0\Rightarrow x_1=0, x_2=-1, x_3=-2$.
1. c)	$A(2)+A^2(2)+\ldots+A^{2018}(2)=\begin{pmatrix}2(2^{2018}-1)&0&0\\0&2(2^{2018}-1)&0\\0&0&2(2^{2018}-1)\end{pmatrix}$. **5p**
2. a)	Există $e\in\mathbf{R}$, $x\circ e=e\circ x=x$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}\Rightarrow e=1$. **5p**
2. b)	$x\circ 2=2\circ x=e\Rightarrow 7x-5=1\Rightarrow x=\frac{6}{7}$. **5p**
2. c)	$x\in\left\{1,\frac{5}{6}\right\}$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$. **2p** $f'(x)=0\Rightarrow x=0$. **1p** Pentru $x\in(-\infty,0)$, $f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare. **1p** Pentru $x\in(0,\infty)$, $f'(x)>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare. **1p**
1. b)	$f(1)=\ln 2$. **1p** $f'(1)=\frac{1}{2}$. **1p** Ecuația tangentei este $x-2y+2\ln 2-1=0$. **3p**
1. c)	$f''(x)=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$. **2p** $f''(x)=0\Rightarrow x_1=1, x_2=-1$. **1p** $f(1)=\ln 2$ și $f(-1)=\ln 2\Rightarrow A(1,\ln 2)$, $B(-1,\ln 2)$ sunt puncte de inflexiune. **2p**
2. a)	$\int(e^{2x}+x^2+1)dx=\frac{e^{2x}}{2}+\frac{x^3}{3}+x+c=F(x)$. **3p** $F(0)=1\Rightarrow F(x)=\frac{e^{2x}}{2}+\frac{x^3}{3}+x+1$. **2p**
2. b)	$F'(x)=f(x)>0\Rightarrow F(x)$ este strict crescătoare. **5p**
2. c)	Aria $=\frac{e^3+6e-10}{3}$. **5p**

TESTUL 47

Subiectul I.

1.	$z=\frac{3i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{3}{5}i-\frac{6}{5}$. **3p** $\lvert z\rvert=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **2p**
2.	$f(1)-f(2)+f(3)-\ldots-f(2018)=-2018$. **5p**
3.	$2^{x+1}+4^x=3\Rightarrow 2^x\cdot 2+(2^x)^2=3$. **2p** Notăm $2^x=y, y>0\Rightarrow y^2+2y-3=0\Rightarrow x_1=-3, x_2=1$. **2p** $2^x=1\Rightarrow x=0$. **1p**
4.	Între 100 și 199 sunt 10 multipli de 10. **2p** $P=\frac{90}{900}=\frac{1}{10}$. **3p**
5.	$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5}{2}\overrightarrow{i}-\frac{1}{2}\overrightarrow{j}$. **5p**
6.	$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{4}{5}$, **2p** $\cos=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{-3}{5}$ **2p** $\Rightarrow \sin x+\cos x=\frac{1}{5}$. **1p**

Subiectul II.

1. a)	AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$ **3p** $2x+y+2-2-x-2y=0\Rightarrow x-y=0$. **2p**
1. b)	$\begin{vmatrix} m+1 & 2 & 1\\ m & m & 1\\ 2m+1 & 5 & 1\end{vmatrix}=-m^2+2m-3$. **2p** $\Delta=-8<0\Rightarrow -m^2+2m-3\neq 0, (\forall)\, m\in\mathbf{R}\Rightarrow A, B, C$ necoliniare. **3p**
1. c)	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{\lvert-m^2+2m-3\rvert}{2}=9$. **3p** $\lvert-m^2+2m-3\rvert=18\Rightarrow m_1=-3, m_2=5$. **2p**
2. a)	$f(-1)=-a-5=0\Rightarrow a=-5$. **5p**
2. b)	$f(x)=x^3+5x^2+3x-1=(x+1)(x^2+4x-1)\Rightarrow$ **3p** $x_1=-1, x_2=-2-\sqrt{5}, x_3=-2+\sqrt{5}$. **2p**
2. c)	$x_1+x_2+x_3=a,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3,\ x_1x_2x_3=1$. **2p** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{S_3}=\lvert x_1^2+x_2^2+x_3^2\rvert\Rightarrow \lvert a^2-6\rvert=3\Rightarrow$ **2p** $x_1=-3, x_2=3, x_3=-\sqrt{3}, x_4=\sqrt{3}$. **1p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x-3}}=e^6$. **5p**
1. b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{x+3}{x-3}=-\infty\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{x+3}{x-3}=\infty\Rightarrow x=3$ asimptotă verticală. **3p** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x-3}=1\Rightarrow y=1$asimptotă orizontală. **2p**
1. c)	$f'(x)=\frac{-6}{(x-3)^2}<0\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,3)$. **3p** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x-3}=1\Rightarrow f(x)<1$pentru orice $x\in(-\infty,3)$. **2p**
2. a)	$\int\limits_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\rvert_e^{e^2}=1$. **5p**
2. b)	$\int\limits_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int\limits_e^{e^2}\frac{(\ln x)'}{\ln x}dx=$ **3p** $\ln(\ln x)\,\rvert_e^{e^2}=\ln 2$. **2p**
2. c)	$V=\pi\int\limits_1^e(x\ln x)^2dx=\frac{\pi(5e^3-2)}{27}$. **5p**

TESTUL 48

Subiectul I.

1.	$(2x+2)^2=(x-2)(x+1)$. **3p** $x^2+3x+2=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=-2$. **2p**
2.	Ecuația axei de simetrie este $x=\frac{m}{4}$. **3p** $\frac{m}{4}=1\Rightarrow m=4$. **2p**
3.	Condiția de existență $6-3^x>0\Rightarrow x<\log_3 6$. **1p** $3^x=y, y>0\Rightarrow y^2+y-6=0\Rightarrow y_1=-3, y_2=2$. **2p** $x=\log_3 2<\log_3 6$. **2p**
4.	$T_{k+1}=C_{30}^k(\sqrt{3})^{30-k}(\sqrt[3]{2})^k=C_{30}^k 3^{15-\frac{k}{2}}\cdot 2^{\frac{k}{3}}$. **3p** $k\le 30, k\vdots 2, k\vdots 3\Rightarrow k\in\{0,6,12,18,24,30\}$ nr. termeni raționali = 6. **2p**
5.	$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}$. **2p** $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{20}, \left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{10}, \left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{10}\Rightarrow ABC$ triunghi dreptunghic. **2p** $A_{\Delta ABC}=5$. **1p**
6.	$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{5}$. **2p** $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$. **2p** $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x=\frac{4\sqrt{6}}{25}$. **1p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A(x)=x^3-3x+2$. **3p** $A(x)$ neinversabilă $\Rightarrow x^3-3x+2=0\Rightarrow x_{1,2}=1, x_3=-2$. **2p**
1. c)	$A^{-1}(-1)\cdot A(-1)\cdot X=A^{-1}(-1)\cdot 2A(0)$ **2p** $\Rightarrow X=2A^{-1}(-1)\cdot A(0)$. **3p**
2. a)	$\log_3 2\circ\log_3 4=3^{\log_3 2+\log_3 4+1}=$ **3p** $3^{\log_3 24}=24$. **2p**
2. b)	$x^2\circ 2x=3^{x^2+2x+1}=3^4$. **3p** $x^2+2x-3=0\Rightarrow x_1=1, x_2=-3$. **2p**
2. c)	$x\circ y\circ(-3)=3^{3^{x+y+1}-2}=3^4\Rightarrow$ **3p** $3^{x+y+1}-2=4\Rightarrow x+y=\log_3 2$. **2p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=-e^{-x}$. **2p** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=f'(0)=-e^0=-1$. **3p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty\Rightarrow y=0$ este singura asimptotă orizontală spre $+\infty$. **5p**
1. c)	$g(x)=f(-x)-x-1=e^x-x-1$. **2p** $g'(x)=e^x-1, g'(x)=0\Rightarrow x=0$. **2p** Pentru $x\in(-\infty,0)$, $g'(x)<0\Rightarrow g$ este strict descrescătoare, iar pentru $x\in(0,+\infty), g'(x)>0\Rightarrow g$ este strict crescătoare $\Rightarrow$ $\Rightarrow g(x)\ge g(0)=0\Rightarrow e^x\ge x+1$ oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$. **1p**
2. a)	$\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=$ **3p** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\|_0^1=\frac{\ln 2}{2}$. **2p**
2. b)	$\int_0^1 f_n(x)dx+\int_0^1 f_{n-2}(x)dx=\int_0^1\frac{x^{n-2}(x^2+1)}{x^2+1}dx=$ **3p** $\int_0^1 x^{n-2}dx=\frac{1}{n-1}$. **2p**
2. c)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^n\le x^{n-2}\Rightarrow\frac{x^n}{x^2+1}\le\frac{x^{n-2}}{x^2+1}\Rightarrow\int_0^1 f_n(x)dx\le\int_0^1 f_{n-2}(x)dx$. **2p** Din punctul b) $\Rightarrow 2\int_0^1 f_n(x)dx\le\frac{1}{n-1}\Rightarrow\int_0^1 f_n(x)dx\le\frac{1}{2n-2}$. **1p** $\int_0^1 f_n(x)dx\ge 0\Rightarrow 0\le\int_0^1 f_n(x)dx\le\frac{1}{2n-2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$. **2p**

TESTUL 49

Subiectul I.

1.	$a=1,\ b=1$. **5p**
2.	$a_1=2,\ a_n=x,\ r=2\Rightarrow n=\frac{x}{2}$. **2p** $S_n=\frac{(2+x)\frac{x}{2}}{2}=1980$. **2p** $x^2+2x-7920=0\Rightarrow x_1=88,\ x_2=-90.\ x\in\mathbf{N}\Rightarrow x=88$. **1p**
3.	Condiția de existență $1-x\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty,1]$. **1p** $x^2+1=(1-x)^2\Rightarrow x=0\in(-\infty,1]$. **4p**
4.	$-6\leq 2x-1\leq 6\Rightarrow x\in\{-2,-1,0,1,2,3\}\Rightarrow$ **3p** card $A=6$. **2p**
5.	$d: y=m_d x+n,\ d': x+2y-1=0\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. **1p** $d\perp d'\Rightarrow m_d\cdot m_{d'}=-1\Rightarrow m_d=2$. **2p** $A\in d\Rightarrow 2=2\cdot(-1)+n\Rightarrow n=4\Rightarrow 2x-y+4=0$. **2p**
6.	$2\sin x+\cos x=1,\ \sin^2 x+\cos^2 x=1$. **2p** $x\in(0,\pi)\Rightarrow \sin x=\frac{4}{5},\ \cos x=-\frac{3}{5}$. **3p**

Subiectul II.

1. a)	$A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1\\ 1 & 3m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}\Rightarrow$ **3p** $\det A(m)=3m^2-5m+2$. **2p**
1. b)	$\det A(m)\neq 0\Rightarrow 3m^2-5m+2\neq 0\Rightarrow$ **3p** $m\in\mathbf{R}\setminus\left\{1,\frac{-3+\sqrt{33}}{6},\frac{-3-\sqrt{22}}{6}\right\}$. **2p**
1. c)	$\det A(1)=0$. **2p** $\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\neq 0$. **1p** $\Delta_x=-4,\ \Delta_y=4,\ z=\lambda\Rightarrow S=(-2,2,\lambda)$. **2p**
2. a)	$f(-1)=2m-2$. **5p**
2. b)	$f=x^3+x^2+x+1\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=i,\ x_3=-i$. **5p**
2. c)	$x_1+x_2+x_3=-m,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1,\ x_1x_2x_3=-m$. **2p** $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=(-m)^2-2$. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)}{(x-3)(x-2)}=$ **2p** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)}{x-3}\cdot\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-2}=1$. **3p**
1. b)	$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ D=(2,\infty)\setminus\{3\}$. **1p** $h'(x)=\frac{x-3-(2x-5)\ln(x-2)}{(x^2-5x+6)^2}<0\Rightarrow$ **3p** $\Rightarrow h$ este strict descrescătosre pentru orice $x\in D$. **1p**
1. c)	Pentru $x\in(2,3),\ \frac{f(x)}{g(x)}>1,\ g(x)<0\Rightarrow f(x)<g(x)$. **2p** Pentru $x\in(3,\infty),\ \frac{f(x)}{g(x)}<1,\ g(x)>0\Rightarrow f(x)<g(x)$. **2p** Pentru $x=3,\ f(3)=g(3)\Rightarrow f(x)\leq g(x)$ pentru orice $x\in(2,\infty)$. **1p**
2. a)	$\int_1^e \ln^2 x\,dx=e-2$. **5p**
2. b)	$n\int_1^x \ln^{n-1}t\,dt+\int_1^x \ln^n t\,dt=n\int_1^x \ln^{n-1}t\,dt+t\ln^n\Big|_1^x-n\int_1^x \ln^{n-1}t\,dt=$ **3p** $t\ln^n\Big|_1^x=x\ln^n x$. **2p**
2. c)	$\int_1^n \frac{1}{x}\ln^n x\,dx=\int_1^n (\ln x)'\ln^n x\,dx=\frac{1}{n+1}=$ **3p** $\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2018}\Rightarrow n=2017$. **2p**

TESTUL 50

Subiectul I.

1.	Pentru $n=2$, $2^2+2>2!$ adevărat. Pentru $n=3$, $3^2+3>3!$ adevărat. Pentru $n=4$, $4^2+4>4!$ fals. Pentru $n=5$, $5^2+5>5!$ fals. **3p** $p=\frac{\text{numărul de cazuri favorabile}}{\text{numărul de cazuri posibile}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. **2p**
2.	$2x-2=\frac{x+1+x-3}{2}$. **3p** $2x-2=x-1$, de unde $x=1$. **2p**
3.	$\Delta=49-48=1$. **1p** $x_1=3$, $x_2=4$. **2p** $x\in[3,4]$. **2p**
4.	$S=\frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}$. **2p** $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1p** $S=\frac{6\cdot 5\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$. **2p**
5.	$1-2m=0$ **2p** $\Rightarrow m=\frac{1}{2}$. **3p**
6.	$\sin 115^\circ=\sin(90^\circ+25^\circ)=$ **1p** $=\cos 25$. **2p** Deci, $\frac{\sin 115^\circ}{\cos 25^\circ}=1$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0_2$. **2p** $B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0_2$. **2p** Avem $AB=BA$. **1p**
1. b)	$A^2=\begin{pmatrix}5&10\\10&20\end{pmatrix}$. **2p** $B^2=\begin{pmatrix}20&-10\\-10&5\end{pmatrix}$. **2p** $A^2+B^2=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}=25I_2$. **1p**
1. c)	Cum $A\cdot B=B\cdot A$ putem aplica formula binomului lui *Newton*. **1p** $C^4=(A+B)^4=A^4+C_n^1A^3B+C_n^2\cdot A^2\cdot B^2+C_n^3A\cdot B^3+B^4=$ **2p** $=A^4+B^4=(A^2+B^2)^2-2A^2B^2=$ **1p** $=5^4I_2$. **1p**
2. a)	$f\vdots(X-1)\Leftrightarrow f(1)=0$. **2p** $f(1)=2m+18=0$. **2p** $m=-9$. **1p**
2. b)	$f=-9X^3+11X^2+7X-9$. **1p** Conform lui a) $(X-1)\mid f$. **1p** Deci $f=(X-1)(-9X^2+2X+9)$. **1p** $\Delta=4\cdot 82$. **1p** $f=-9(X-1)\left(X-\frac{1-\sqrt{82}}{9}\right)\left(X-\frac{1+\sqrt{82}}{9}\right)$. **1p**
2. c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1+\left(\frac{1-\sqrt{82}}{9}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{82}}{2}\right)^2=$ **2p** $=1+\frac{2}{81}+\frac{164}{81}=\frac{247}{81}$. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$l_s(1)=1$. **1p** $l_d(1)=0$. **1p** $l_s(1)\neq l_d(1)\Rightarrow f$ discontinuă în $x_0=1$. **3p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=$ **2p** $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. **3p**
1. c)	$f(e^{x^k})=x^k,(\forall)x>1$. **1p** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(e^x)+f(e^{x^2})+\ldots+f(e^{x^{2017}})}{x^{2017}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2+\ldots+x^{2017}}{x^{2017}}=$ **2p** $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\frac{x^{2017}-1}{x-1}}{x^{2017}}=$ **1p** $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x^{2017}-1}{x^{2017}}=1\cdot 1=1$. **1p**
2. a)	F derivabilă ca sumă de funcții derivabile și **1p** $F'(x)=f(x)$. **3p** Deci, F este o primitivă a lui f. **1p**
2. b)	$\int_0^1 f(x)dx=$ **2p** $=\left(e^x+\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^1=e+\frac{4}{3}-1=$ **2p** $=e+\frac{1}{3}$. **1p**
2. c)	$h(x)=\frac{e^x}{e^x+1}>0,(\forall)x\in[0,1]$. **1p** $\mathcal{A}=\left\|\int_0^1 h(x)dx\right\|=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx$. **1p** Cu schimbarea de variabilă $e^x=t$, avem: $\mathcal{A}=\int_1^e\frac{1}{t+1}dt=\ln(t+1)\Big\|_1^e=$ **1p** $=\ln\frac{e+1}{2}$. **2p**

TESTUL 51

Subiectul I.

1.	$2^2 = 4$. **1p** $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$. **3p** Deci $2^2 = \log_2 16$. **1p**
2.	$3^{2x-5} = 3^{x^2-8} \Rightarrow 2x-5 = x^2-8$. **2p** $x^2-2x-3=0$. **1p** $\Delta = 16$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. **2p**
3.	Dacă $v_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$, iar $v_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$, atunci condiția de coliniaritate este $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$. **2p** Avem: $\frac{2}{-1} = \frac{3}{m} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$. **3p**
4.	Condiția de coliniaritate este $m_{AB} = m_{BD}$ **2p** $\Rightarrow \frac{2}{-4} = \frac{a-2}{2} \Rightarrow 8-4-4a=0 \Rightarrow a = 1$. **3p**
5.	$\Delta = 4 \Rightarrow x_1 = 3$, $x_2 = 5$, deci $f(3) = f(5) = 0$. **2p** Avem: $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(6) = 0$. **3p**
6.	$1^2 \le 2^1$, adică $2^2 \le 2^2$ adevărat. $3^2 \le 2^3$ fals, $4^2 \le 2^4$ adevărat, $5^2 \le 2^5$ fals. **3p** $P = \frac{\text{Numărul de cazuri favorabile}}{\text{Numărul de cazuri posibile}} = \frac{3}{5}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ **3p** $= -6+6 = 0$. **2p**
1. b)	$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. **2p** $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = A$ **2p** $\Rightarrow A^3 + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$. **1p**
1. c)	Cum $A^3 = A$, avem $A^4 = A^2$ și așa mai departe. **2p** $A + 2A^2 + \ldots + 10A^{10} = A + 2A^2 + 3A + 4A^2 + \ldots + 9A + 10A^2 =$ **1p** $= A^2 + A^2 + \ldots + A^2 = 5A^2$. **2p**

Subiectul III.

2. a)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+x+2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1-1}{x^2+x+2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+2)\Big\|_0^1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\Big\|_0^1$. **5p**
2. b)	$I_{n+2} + I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1 = \frac{1}{n+1}$. **5p**
2. c)	$(\forall)x \in [0,1]$ șirul este mărginit și monoton descrescător $\Rightarrow$ este convergent. **5p**

TESTUL 52

Subiectul I.

1.	$x \in \{2,3\}$. **3p**
2.	$f(2)=2+1, f(2^2)=2^2+1, f(2^3)=2^3+1$. **2p** $f(2)+f(2^2)+f(2^3)=3+5+9=17$. **3p**
3.	Obținem $2^{2x^2+3x-2}=2^3$. **1p** Deci $2x^2+3x-2=3$, $2x^2+3x-5=0$. **1p** $1=9+40=49$, $x_1=1$, $x_2=-\frac{5}{2}$. **3p**
4.	$n=2$, $2^2+2>2!$ adevărat. $n=3$, $2^3+3>3!$ adevărat. $n=4$, $2^4+4>4!$ fals $n=5$, $2^5+5>5!$ fals **3p** $P=\frac{\text{Numărul de cazuri favorabile}}{\text{Numărul de cazuri posibile}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. **2p**
5.	$(AB): \frac{x-2}{-2-2}=\frac{y+1}{a+1}$, $a\neq -1$. **2p** $0\in AB \Rightarrow \frac{0-2}{-4}=\frac{0+1}{a+1}$ **2p** $\Rightarrow a+1=2 \Rightarrow a=1$. **1p**
6.	$\cos^2 x+\sin^2 x=1, (\forall)x\in\mathbf{R}$. **1p** $\cos^2 x+\frac{9}{25}=1 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{16}{25}$. Cum $x\in(0^\circ,90^\circ) \Rightarrow \cos x>0$. **2p** Deci $\cos x=\frac{4}{5}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-1+1=0$. **5p**
1. b)	$A\cdot I_2=I_2\cdot A \Rightarrow I_2\in G$. **2p** $A\cdot A=A\cdot A\Rightarrow A\in G$. **3p**
1. c)	$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0_2$. **3p** $(\forall)X\in\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, $X\cdot A^2=0_2$ și $A^2\cdot X=0_2$. Deci $X\cdot A^2=A^2\cdot X$. **2p**
2. a)	$f(0)=25$. **2p** $f(i)=(i-1)\cdot(i-2)\cdot(i-3)\cdot(i-4)+1=-10-20i$. **3p**
2. b)	$f(X)=X^4-10X^3+35X^2-50X+25$. **2p** $(X^2-5X+5)^2=X^4-10X^3+35X^2-50X+25$. **2p** Deci se obține polinomul nul. **1p**
2. c)	$f(x)=0 \Rightarrow x^2-5x+5=0$. **2p** $\Delta=5 \Rightarrow$polinomul nu are rădăcini raționale. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$. **2p** $f'(x)=2x+e^x$. **2p** $f'(0)=1$. **1p**
1. b)	$f''(x)=2+e^x$. **2p** $f''(x)>0, (\forall)x\in\mathbf{R}$ **1p** $\Rightarrow f$ convexă pe $\mathbf{R}$. **2p**
1. c)	$f'(x)-f''(x)+f(x)=2x+e^x-(2+e^x)+x^2+e^x=e^x+x^2+2x-2$.Ecuația devine **2p** $e^x+x^2+2x-2=e^x-3 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0, (x+1)^2=0$, $x=-1$ soluție unică. **3p**
2. a)	$I_0=\frac{\pi}{2}$. **5p**
2. b)	$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(\cos x)^{n-1}x\,dx=\sin x\cdot\cos^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x-(n-1)\cdot$ $\cdot\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\cos^{n-2}x\cdot\sin^2 x\,dx=$**2p** $=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{n-2}x-\cos^n x)dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$. **2p** Se obține $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. **1p**
2. c)	$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x\in(0,1) \Rightarrow (\cos x)^n\in(0,1), (\forall)n\in\mathbf{N} \Rightarrow I_n<I_n<\frac{\pi}{2}$, deci șirul **2p** este mărginit (1). Pentru $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos^n x>\cos^{n+1}x, (\forall)n\in\mathbf{N}$, de unde $I_n>I_{n+1}$, **2p** Deci șirul este monoton descrescător. Din (1) și (2) șirul este convergent. **1p**

TESTUL 53

Subiectul I.

1.	$a+b=4$ și $a\cdot b=3$. **1p** Se obține $a=1$ și $b=3$ sau **2p** $a=3$ și $b=1$. **1p** $\Rightarrow a^2+b^2=10$ **1p**
2.	$x=5$, verifică ecuația, deci $m^2\cdot 4=5-3m+2$, de unde **2p** $4m^2+3m-7=0$ se obține **1p** $m\in\left\{1,-\frac{7}{4}\right\}$. **2p**
3.	Notăm $\lg x=t$. **2p** $t^2-4t+3=0\Rightarrow t\in\{1,3\}$. **1p** Pentru $t=1\Rightarrow \lg x=1\Rightarrow x=10$. **1p** Pentru $t=3\Rightarrow \lg x=3\Rightarrow x=10^3$. **1p**
4.	$\mathcal{A}=\frac{\lvert\Delta\rvert}{2}$. **1p** $\Delta=\begin{vmatrix}4&0&1\\0&2&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=8-2+4=10$. **2p** $\mathcal{A}=5$. **2p**
5.	Din teorema sinusunilor $\frac{a}{\sin A}=2R$. **2p** Deci $\frac{4}{\sin 30^\circ}=2R\Rightarrow R=4$. **3p**
6.	$M=a_2-a_1=-1$. **2p** $a_7=a_1+6r=$ **1p** $=6-6=0$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A_1(1,2)$, $A_2(2,4)$. **1p** A_1,A_2 coliniare $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}0&0&1\\1&2&1\\2&4&1\end{vmatrix}=0$ **2p** $\Leftrightarrow 4-4=0$ adevărat. **2p**
1. b)	$A_0(0,1)$. **1p** A_0,A_1,A_2 coliniare $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&1\\2&4&1\end{vmatrix}=0$ **1p** $\Leftrightarrow 2+4-6-1=-1\neq 0$. Deci A_0,A_1,A_2 necoliniare. Numărul dreptelor este $1+3=4$. **2p**
1. c)	$\mathcal{A}=\frac{\lvert\Delta\rvert}{2}$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}n&2^n&1\\n+1&2^{n+1}&1\\n+2&2^{n+2}&1\end{vmatrix}$ **=2p** $=\begin{vmatrix}n&2^n&1\\1&2^n&0\\2&3\cdot 2^n&0\end{vmatrix}=2^n$. **2p** $\mathcal{A}=2^{n-1}$. **1p**
2. a)	$A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$, $A_y=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\y&0&1\end{pmatrix}$. **1p** $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x+y&0&1\end{pmatrix}=A_{x+y}$. **4p**
2. b)	$(\exists)A_e\in G$, astfel încât $(\forall)A_x\in G$. **2p** $A_e\cdot A_x=A_x\cdot A_e=A_x\Rightarrow e+x=x\Rightarrow e=0$. **2p** Elementul neutru este $A_0=I_3\in G$. **1p**
2. c)	$f:(\mathbf{Z},+)\to(G,\cdot)$, $f(x)=1$ este izomorfism dacă $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ și f bijectivă **2p** $f(x+y)=A_{x+y}$, $f(x)\cdot f(y)=A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, f injectivă $\Leftrightarrow(\forall)x_1,x_2\in\mathbf{Z}$, $f(x_1)=$ $=f(x_2)\Rightarrow A_{x_1}=A_{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$, **2p** f surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă. **1p**

Subiectul III.

1. a)	$l_s(1)=0$. **1p** $l_d(1)=0$. **1p** $l_1(1)=l_d(1)=f(1)=0$, deci f este continuă în $x_0=1$. **3p**
1. b)	Pentru $x<1$, $f'(x)=-2x+1$. Deci $f'(0)=1$. **2p** Pentru $x>1$, $f'(x)=2x-1$. Deci $f'(2)=3$. **2p** $f'(0)+f'(2)=4$. **1p**
1. c)	$f'_s(1)=-1$. **2p** $f'_d(1)=1$. **2p** Din $f'_s(1)\neq f'_d(1)$, obținem că f nu este derivabilă în $x_0=1$. **1p**
2. a)	$I_0=\int_2^3\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\rvert_2^3$ **3p** $=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$. **2p**
2. b)	$I_1=\int_2^3\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{2x}{x^2+1}dx=$ **1p** $=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\rvert_2^3=$ **2p** $=\frac{1}{2}\ln 2$. **2p**
2. c)	$I_{n+2}+I_n=\int_2^3\frac{x^{n+2}}{x^2+1}dx+\int_2^3\frac{x^n}{x^2+1}dx=$ **2p** $=\int_2^3\frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx=$ **1p** $=\int_2^3 x^n dx=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$. **2p**

TESTUL 54

Subiectul I.

1.	Suma unei progresii geometrice cu rația $q=3$. $486=b_1\cdot q^{n-1}\Leftrightarrow 486=2\cdot 3^{n-1}\Leftrightarrow$ **1p** $\Leftrightarrow 243=3^5=3^{n-1}\Rightarrow n=6$.... **2p** $S_6=b_1\cdot\frac{2^6-1}{q-1}=2\cdot\frac{3^6-1}{3-1}=3^6-1$. **2p**
2.	$-x^2+6x-5=0$, $\Delta=36-20=16$ **2p** $x_1=1$, $x_2=5$. **3p**
3.	Condițiile de existență sunt: $\log_4(2x-1)\le\log_2 x\Leftrightarrow 2x-1>0$ și $x>0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)\Leftrightarrow$ **2p** $2x-1\le x^2\Leftrightarrow$ **2p** $(x-1)^2\ge 0\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$. **1p**
4.	$C_6^2=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$ **2p** $A_5^3=\frac{5!}{2!}=60$ **2p**. Deci $C_6^2+A_5^3=75$. **1p**
5.	Fie $d: 2x-3y+4=0\Rightarrow m_d=\frac{2}{3}$ **1p** Două drepte sunt paralele dacă au pantele egale. **1p** Obținem: $y+3=\frac{2}{3}(x-1)$ sau $2x-3y-11=0$. **3p**
6.	$\sin(75^\circ)=\sin(45^\circ+30^\circ)=$ **1p** $\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cos 45^\circ=$ **2p** $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$x=2$, $y=1$, $z=-1$, verifică sistemul, deci: **1p** $2m-1-4=1$, de unde **2p** $m=3$ **2p**
1. b)	$\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&1&1\\m&-1&4\end{vmatrix}=4-6-2m-3m+16+1=-5m+15$ **2p**. Avem: $-5m+15=m^2-3m\Leftrightarrow$ **1p** $\Leftrightarrow m^2+2m-15=0$. $\Delta=64\Rightarrow m_1=3$, $m_2=-5$. **2p**
1. c)	Pentru $m=-5$ sistem compatibil determinat (cranerian). **2p** $\Delta_x=0\Rightarrow x=0$, $\Delta_y=120\Rightarrow y=3$, $\Delta_z=120\Rightarrow y=3$. **2p**
2. a)	$f=(x^2-1)\cdot q+aX+b$ **1p** $f(1)=0\Rightarrow a+b=0$, $f(-1)=0\Rightarrow -a+b=0\Rightarrow a=b=0$ **2p** Deci, restul este 0. $f=(X^2-1)(X-9)$. Deci, câtul este $X-9$. **2p**
2. b)	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=9(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x_1+x_2+x_3-27=$ **2p** $9(81+2)+9-27=9\cdot 81=9^3$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=83$. **2p** Egalitatea 9^3..... $=9\cdot 83-18=9^3$ este verificată. **1p**
2. c)	$f(3^x)=(3^{2x}-1)(3^x-9)=0$ **2p** $3^{2x}=1\Rightarrow x=0$ **1p** $3^x=9\Rightarrow x=2$ **1p** Soluția este $x\in\{0,2\}$. **1p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$, $(\forall)x>0$. **5p**
1. b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$, deci **2p** $y-2=0\Rightarrow y=2$. **3p**
1. c)	$2\sqrt{x}-\ln x\ge 2$, $(\forall)x>0$, $f(x)\ge 2$, $(\forall)x>0$ **2p** $f'(x)=0\Rightarrow x=1$ **1p**
	$\begin{array}{c\|ccc}x&0&1&\infty\\\hline f'(x)&\|&-\ 0\ +&\\\hline f(x)&\|&\searrow\ 2\ \nearrow&\end{array}$ **2p**
2. a)	f derivabilă și **1p** $f'(x)=2x+\ln x+1=g(x)$, $(\forall)x>0$. **4p**
2. b)	$\int_1^e f(x)g(x)dx=\int_1^e f'(x)f(x)dx=f^2(x)\Big\|_1^e-\int_1^e f(x)\cdot f'(x)dx$ **2p** $\Rightarrow\int_1^e f(x)g(x)dx=\frac{(e^2+e)^2-4}{2}$. **3p**
2. c)	$\mathcal{A}=\left\|\int_1^e g(x)dx\right\|=f(x)\Big\|_1^e=e^2+e-1$. **5p**

TESTUL 55

Subiectul I.

1.	Condiție de existență: $x>0$ **1p** $\log_2(x^2+2x)=3 \Leftrightarrow$ **2p** $x^2+2x-8=0$. $\Delta=36$. $x_1=2$ convine $x_2=-4$ nu convine **2p**
2.	$5\vec{u}+3\vec{v}=-15\vec{i}+10\vec{j}+15\vec{i}+3\vec{j}=7\vec{j}$. **5p**
3.	$\cos 79+\cos 101=\cos 79-\cos 79=0$. **5p**
4.	$x_1+x_2=-m$, $x_1x_2=2$. **2p** Avem $m^2-4=5 \Rightarrow m\in\{-3,3\}$. **3p**
5.	$(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$ **2p** $(1-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{2}$. **2p** $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=6\in\mathbf{N}$. **1p**
6.	Numerele prime din A sunt 11, 13, 17, 19. **2p** $p=\frac{\text{Număr de cazuri favorabile}}{\text{Număr de cazuri posibile}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ **3p**

Subiectul II.

1. a)	$D(-1)=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}$ = **2p** $-1-1-1+1-1-1=-4$. **3p**
1. b)	$D(a)=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}$ = **2p** $(a+2)(a+a+1-a^2-1-1)=$ **2p** $=-(a+2)(a-1)^2$. **1p**
1. c)	$D(a)=-4 \Leftrightarrow (a+2)(a-1)^2=4$ **1p** $a^3-3a-2=0 \Leftrightarrow a^3+1-3(a+1)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a+1)(a^2-a-2)=0$ **2p** $a\in\{-1,2\}$. **2p**
2. a)	$2018\circ(-2018)=2^\circ=1$. **5p**
2. b)	$x\circ x^2=2^{x+x^2}=2^6 \Rightarrow$ **2p** $x^2+x-6=0$, de unde **2p** $x\in\{2,-3\}$. **1p**
2. c)	$(x\circ y)\circ z=(2^{x+y})\circ z=2$ **2p** $2^{2^{x+y}+z}=2^z \Rightarrow 2^{x+y}=0$ imposibil **3p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\ln x+1, (\forall)x>0$. **5p**
1. b)	$\lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)$. **2p** $f'(e)=2$. **3p**
1. c)	$f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{e}$ **2p** $\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & \frac{1}{e} & \infty \\ \hline f'(x) & - & 0 & + \\ \hline f(x) & \searrow & -\frac{1}{e} & \nearrow \end{array}$. **2p** Deci $f(x)\geq -\frac{1}{e}, (\forall)x>0$. **1p**
2. a)	F derivabilă și **1p** $F'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x=f(x)$, **2p** $(\forall)x\in\mathbf{R}$. **2p**
2. b)	$\mathcal{A}=\left\|\int_1^2(x-1)e^x dx\right\|$ = **2p** $(x-1)e^x\|_1^2-\int_1^2 e^x dx=e^2-e^2+e=e$. **3p**
2. c)	$\int_0^1\frac{xe^x-(x-1)e^x}{e^x+1}=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=$ **2p** $\ln(e^x+1)\|_0^1=\ln\frac{e+1}{2}$. **3p**

TESTUL 56

Subiectul I.

1.	$\log_6 3+\log_6 10-\log_6 5=\log_6 6=1$. **5p**
2.	Notăm $3^x=t$. Avem **2p** $t^2+2t-3=0\Rightarrow t\in\{-3,1\}$ **1p** $3^x=-3$ nu are soluții **1p** $3^x=1\Rightarrow x=0$ soluție unică. **1p**
3.	$(x+7)^2=(5-x)(3x+11)$ **2p** $x^2+14+49=-3x^2+4x+55$ **1p** $4x^2+10x-6=0\Leftrightarrow 2x^2+5x-3=0$ **1p** $x\in\left\{\frac{1}{2},-3\right\}$. **1p**
4.	Din teorema cosinusului, avem: $NP^2=MN^2+MP^2-2MN...MP\Rightarrow M$ **1p** $NP^2=9+25-30\cdot\frac{1}{2}=19$ **3p** $NP=\sqrt{19}$. **1p**
5.	$2\frac{n!}{2\cdot(n-2)!}\le n+8\Leftrightarrow n^2-2n-8\le 0$. **2p** Cum $n\ge 2$, soluția este $n\in\{2,3,4\}$. **3p**
6.	$\begin{cases}x+2y-4=0\\x-3y-4=0\end{cases}$ **2p** $\Rightarrow x=4$ și $y=0\Rightarrow A(4,0)$ este punctul comun al dreptelor. **3p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix}a-1 & 1\\ a & 2\end{vmatrix}=4a-3$ **2p** $\det A=0\Rightarrow a=3$. **3p**
1. b)	$a=3$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. **1p** Cum $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **3p** $\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$. **1p**
1. c)	Pentru $a=3$, $A\cdot X=B$ are soluție. $X=A^{-1}\cdot B$. **2p** Așadar $X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 5\end{pmatrix}$ **3p**
2. a)	$x_1+x_2+x_3=m+1=1\Rightarrow m=0$. **5p**
2. b)	$x_1=\sqrt{3}\Rightarrow f(\sqrt{3})=0$. **2p** $3\sqrt{3}-3(m+1)-3\sqrt{3}+3=0$ **2p** $\Rightarrow m=0$. **1p**
2. c)	Pentru $m=0$, avem soluția: $x_1=\sqrt{3}$, de unde $x_2=-\sqrt{3}$ și din a) $x_3=1$. **2p** Obținem: $f=(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X+1)$. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$ **5p**
1. b)	$y-f(2)=f'(2)(x-2)$ **2p** $f(2)=e^2$, $f'(2)=0$. **2p** Ecuația tangentei este: $y-e^2=0$ **1p**
1. c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=2$. $\begin{array}{c|ccc}x & 1 & 2 & \infty\\ \hline f'(x) & - & 0 & +\\ \hline f(x) & \searrow & e^2 & \nearrow\end{array}$. **3p** Deducem că $f(x)\ge e^2,(\forall)x\ge 1$. **2p**
2. a)	F derivabilă. **1p** $F'(x)=1-\frac{1}{x^2}=f(x),(\forall)x>0$. **4p**
2. b)	$\int F(x)dx=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\ln x+\mathscr{C}$. **5p**
2. c)	$\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\ln x+\mathscr{C}$. **5p**

TESTUL 57

Subiectul I.

1.	$14 < 10\sqrt{2} < 15$ **2p** $\Rightarrow [10\sqrt{2}] = 14$. **3p**
2.	Funcția f admite punctul de maxim $M\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Așadar $\text{Im}f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$. **3p** $\Delta = 16 + 40 = 56$ **1p** $\text{Im}f = (-\infty, 7]$. **1p**
3.	$2^{-x^2+2x+1} = 2^{-6}$. **2p** $\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 7 = 0$, $\Delta = 4 + 28 = 32$ **1p** $x_1 = \frac{-2+4\sqrt{2}}{-2} = 1 - 2\sqrt{2}$.**1p** $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$. **1p**
4.	$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$ **2p** $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 62$**p** $C_4^2 + A_4^2 = 18$ **1p**
5.	A, B, C coliniare, dacă $m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow m = 16$. **5p**
6.	$\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ \Rightarrow$ **1p** $\cos^2 170^\circ = \cos^2 10^\circ \Rightarrow$ **1p** $\sin^2 10^\circ + \cos^2 170^\circ = \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ = 1$. **3p**

Subiectul II.

1. a)	$x_1 + x_2 + x_3 = 0$. **5p**
1. b)	Avem: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3) + 6 = 0$, de unde $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$. **5p**
1. c)	$\Delta = 0$. **5p**
2. a)	$x \circ y = x(y+2) + 2(y+2) - 2 = (x+2)(y+2) - 2$. **5p**
2. b)	$(\exists) e_1 \in \mathbf{Z}$, astfel încât $(\forall) x \in \mathbf{Z}, x + e_1 = e_1 + x = x \Rightarrow$ **1p** $\Rightarrow x + e_1 + 2 = x \Rightarrow e_1 = -2 \in \mathbf{Z}$. **1p** $(\exists) e_2 \in \mathbf{Z}$, astfel încât $(\forall) x \in \mathbf{Z}, x \circ e = e \circ x = x \Rightarrow$ **1p** $\Rightarrow (x+2)(e_2+2) - 2 = x, (\forall) x \in \mathbf{Z}, e_2 = -1 \in \mathbf{Z}$. **2p**
2. c)	$x^2 * y^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3$ **1p** $x^2 \circ y^2 = 16 \Leftrightarrow (x^2+2)(y^2+2) = 18$ **1p** $(x, y) \in \{(1,2), (-1,2), (1,-2), (-1,-2), (2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)\}$.**3p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}, (\forall) x > 0$. **5p**
1. b)	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -1$. **5p**
1. c)	$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{x - x + 2}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0, (\forall) x > 0$. **3p** $\Rightarrow f'$ strict crescătoare pe $(0, \infty)$. **2p**
2. a)	$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2 x \, dx$. Cu schimbarea de variabilă $x = \text{arctg}\, t$, **1p** avem: $I_1 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = t\Big\|_0^1 - \text{arctg}\, t\Big\|_0^1 =$ **3p** $1 - \frac{\pi}{4}$. **1p**
2. b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^{2n+2} x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \text{tg}^{2n} + dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^{2n} x (\text{tg}^2 x - 1) dx$. **3p** Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ $\text{tg}\, x < 1$ și deci $I_{n+2} - I_n < 0, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$, adică șirul $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict descrescător. **2p**
2. c)	$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^{2n} x \, dx > 0$ și ținând cont de b) șirul este convergent. **2p** $I_{n+1} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^{2n} x (\text{tg}^2 x + 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^{2n} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$. Cu schimbarea de variabilă **1p** $\text{tg}^2 x = t$, avem $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$. Trecând de la limită la relația de recurență (șirul este convergent), avem: $2e = 0 \Rightarrow e = 0$. **2p**

TESTUL 58

Subiectul I.

1.	$(1+i\sqrt{3})^2 = 1+2i\sqrt{3}-3$ **1p** $(1-i\sqrt{3})^2 = 1-2i\sqrt{3}-3$ **1p** $(1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2 = -4 \in \mathbf{Z}$. **3p**
2.	x, y sunt soluțiile ecuației $t^2-4t+3=0$. **2p** Obținem: $x, y \in \{1,3\}$. **3p**
3.	Condiția de existență: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ și $\sqrt{x-2}-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. **2p** Ecuația se mai scrie $x+6 = 6\sqrt{x-2}$. **1p** Prin ridicare la pătrat posibilă din condiția de existență, avem: $x^2+12x+36 = 36x-72$. **1p** $x^2-24x+108=0$, $x \in \{6,18\}$; ambele convin. **1p**
4.	$T_{k+1} = C_9^k (x^2)^{9-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$ **2p** $T_{k+1} = C_9^k x^{18-3k}$ **1p** $18-3k=0 \Rightarrow k=6 \Rightarrow T_7$. **2p**
5.	$d(A,d) = \frac{\lvert 3\cdot 3-4\cdot 0+1\rvert}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2$. **5p**
6.	$\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{16+25-36}{2\cdot 4\cdot 5}$ **1p** $\cos B = \frac{1}{8}$. **1p** $\cos C = \frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC} = \frac{36+25-16}{2\cdot 6\cdot 5}$. **1p** $\cos C = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$. **1p** $\cos B = 2\cos^2 C - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8} = 2\cdot\frac{9}{16} - 1$ adevărat $\Rightarrow m(B) = 2m(C)$. **1p**

Subiectul II.

1. a)	$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. **5p**
1. b)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow$ **1p** A inversabilă și $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow$ **1p** $X = A^{-1}\cdot B$. **3p**
1. c)	$A^2-4A+5I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 0_2$. **5p**
2. a)	$e = 1$. **3p**
2. c)	$x * x = 1 \Leftrightarrow 2-(x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{1,3\}$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+2)}{(x-1)^2} =$ **2p** $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. **3p**
1. b)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$, $x \in \{-1,3\}$ **2p** $A(-1, f(-1))$ punct de maxim local. **2p** $B(3, f(3))$Punct de minim local. **1p**
1. c)	$m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{x^2-x} = 1$ **2p** $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+2}{x-1}-x\right) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{x-1} = 2$. $y = x+2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$. **3p**
2. a)	$\int f_1(x)dx = \int(x^2+x+1)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\mathscr{C}$. **5p**
2. b)	$\int_0^1 e^x f_0(x)dx = \int_0^1 e^x(x+1)dx = e^x(x+1)\Big\rvert_0^1 - e^x\Big\rvert_0^1 = 2e-1-e+1 = e$. **5p**
2. c)	$\int_0^1 f_m(x)dx = m^2\,\frac{x^3}{3}\Big\rvert_0^1 + (m^2-m+1)\,\frac{x^2}{2}\Big\rvert_0^1 + x\Big\rvert_0^1 = \frac{m^2}{3}+\frac{m^2-m+1}{2}+1 = \frac{3}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow 5m^2-3m=0$.Cum $m \neq 0$, singura soluție este $m = \frac{3}{5}$. **5p**

TESTUL 59

Subiectul I.

1.	$f(1)=1^2+2\cdot 1+3; f(2)=2^2+2\cdot 2+3;\ldots; f(10)=10^2+2\cdot 10+3$ **2p** $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)=1^2+2^2+\ldots+10^2+2(1+2+\ldots+10)+3\cdot 10$. **3p**
2.	$a_2=a_1+r, a_3=a_1+2r, a_4=a_1+3r, a_5=a_1+4r$. **2p** $\begin{cases} 3a_1+5r=15 \\ 3a_1+9r=27 \end{cases} \Rightarrow r=3, a_1=0$. **2p** $a_{20}=a_1+19\cdot r=57 \Rightarrow S_{20}=570$. **1p**
3.	Pentru $x>0$, avem: $\log_3 x=\log_3 9-2\log_3 2 \Rightarrow$ **4p** $x=\frac{9}{4}$ verifică condiția **1p**
4.	$T_{k+1}=C_{100}^k\sqrt[3]{2}^{\,100-k}\cdot\sqrt[4]{3}^{\,k}, k=\overline{0,100}$. **1p** $T_{k+1}\in\mathbf{Q}\Leftrightarrow 100-k\ \vdots\ 3$ și $k\ \vdots\ 4, k=\overline{0,100}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k=\mathcal{M}_3+1$ și $k=\mathcal{M}_4, k=\overline{0,100}\Leftrightarrow$ **2p** $k\in\{4,16,\ldots,100\}$, deci 9 termeni. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$. **5p**
1. b)	$A+I_3=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **2p** este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A+2I_3)\neq 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2a\neq 0\Leftrightarrow a\neq 2$. **3p**
1. c)	$f(A)=A^2-4A+4I_3$ **1p** $=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 4a & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+4 & -4a & a \\ -3 & a+4 & -3 \\ -3 & a & 1 \end{pmatrix}$. **2p** Deducem că $a=-1$. **2p**
2. a)	$x\circ y=2xy-8x-8y+32+4=2x(y-4)-8(y-4)+4=2(x-4)(y-4)+4$.**5p**
2. b)	$x\circ x=2(x-4)(x-4)+4=36$ **1p** $\Rightarrow (x-4)^2=16$ **2p** $\Rightarrow x\in\{0,8\}$. **2p**
2. c)	Elementul neutru este $e=\frac{9}{2}$, iar elementul $x=4$ nu este simetrizabil. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+2)}{(x-1)^2}$ **2p** $f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.**3p**
1. b)	$f'(x)=0\Rightarrow x^2-2x-3=0$ **1p** $\Rightarrow x_1=-1$ și $x_2=3$ puncte critice $\Rightarrow A(-1,-1)$ punct de maxim local **2p** $B(3,7)$ punct de minim local **2p**
1. c)	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{x^2-x}=1$ **1p** $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=$ **1p** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{x-1}=2\Rightarrow$ $\Rightarrow y=x+2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$. **3p**
2. a)	$\int e^{3x}dx=\frac{e^{3x}}{3}+\mathscr{C}$. **5p**
2. b)	$v=\pi\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\pi\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^e=\frac{\pi}{2}$. **5p**
2. c)	$\int_1^3\frac{1}{x(x+2)}dx=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int_1^3\frac{1}{x+2}dx=\left.\frac{1}{2}\ln x\right|_1^3-\left.\frac{1}{2}\ln(x+2)\right|_1^3=$ $=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **5p**

TESTUL 60

Subiectul I.

1.	$\left\|\frac{24-7i}{8+5i}\right\| = \frac{\|24-7i\|}{\|8+5i\|} = \frac{\sqrt{24^2+7^2}}{\sqrt{8^2+5^2}} = \mathbf{2p}\ \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{89}} = \frac{25\sqrt{89}}{89}$. **3p**
2.	$\Delta < 0$. **2p** $\Delta = m^2 - 36$. **1p** $m^2 - 36 < 0 \Rightarrow m \in (-6,6)$. **2p**
3.	Notăm pentru $x > 0$, $\lg x = t$. Ecuația $t^2 - t - 56 = 0$ are soluțiile $t_1 = -7$ și $t_2 = 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \{10^{-7}, 10^8\}$. **5p**
5.	Punctul $M(2,2)$ este mijlocul laturii BC. **2p** Ecuația este $x - 2y + 2 = 0$. **3p**
6.	$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, $\cos x > 0$, pentru $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, ...\right) \Rightarrow \cos x = \frac{24}{25}$. **3p** $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{7}{24}$. **2p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$. **5p**
1. b)	$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **5p**
1. c)	$A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2a & \sin 2a & 0 \\ -\sin 2a & \cos 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1p** Se demonstrează prin inducție că: $A^n = \begin{pmatrix} \cos na & \sin na & 0 \\ -\sin na & \cos na & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$. **4p**
2. a)	$f(1) = 5, f(-1) = -1$. **3p** $\Rightarrow f(1) \cdot f(-1) = -5$. **2p**
2. b)	$f = (X^3 - X) \cdot q + aX^2 + bX + c$. $f(0) = c = 1, f(1) = a + b + c = 5, f(-1) = a - b + c = -1$, **3p** de unde restul este $X^2 + 3X + 1$. **2p**
2. c)	Cum $f \in \mathbf{Z}[X]$, dacă $a \in \mathbf{Z}$ este rădăcina lui f, $a \mid 1$, deci $a = 1$ sau $a = -1$fals din a). **5p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x + 2017}{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - x^4} = \frac{1}{4}$. **5p**
1. b)	f inversabilă $\Leftrightarrow f$ bijectivă. **1p** $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$. **1p** Deci f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, de unde f injectivă. **1p** f continuă pe $\mathbf{R}$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Deducem (*Darboux*) că f este și surjectivă. **1p** Rezultă f bijectivă. **1p**
1. c)	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{f^{-1}(f(y))}{\sqrt[3]{f(y)}} = \mathbf{2p} \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{\sqrt[3]{y^3 + 2y + 2017}} = 1$.**3p**
2. a)	F derivabilă și $F'(x) = f(x)$. **5p**
2. b)	$G'(x) = f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \geq 0, (\forall) x \geq 1$. **5p**
2. c)	$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx + \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ etc. **5p**

TESTUL 61

Subiectul I.

1.	$(1+i\sqrt{3})^2=(-2+2i\sqrt{3})=2(-1+i\sqrt{3})$. **5p**
2.	$a>0$ și $\Delta\le 0$. **1p** $\Delta=(a+1)^2-4a(a+1)=(a+1)(-3a+1)$, $\Delta<0\Rightarrow a\in-\left[1,\frac{1}{3}\right]$ **2p** cum $a>0$, soluția finală este $a\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$. **2p**
3.	Notăm $4^{\lg x}=t$, $t^2=11t-10$ are soluția $t\in\{1,10\}$. **2p** Deci $4^{\lg x}=1\Rightarrow x=1$. $4^{\lg x}=10\Rightarrow \lg x\cdot\lg 4=1\Rightarrow \lg x=\frac{1}{\lg 4}\Rightarrow x=10^{\frac{1}{\lg 4}}$. Soluția finală este $x\in\left\{1,10^{\frac{1}{44}}\right\}$. **3p**
4.	Cazurile favorabile sunt 16, 61, 25, 52, 34 și 43 $\Rightarrow p=\frac{6}{90}=\frac{2}{30}$. **5p**
5.	$m_{BC}=\frac{9}{3}=3\Rightarrow m_h=-\frac{1}{3}$. **2p** $h_A: y-2=-\frac{1}{3}(x+3)$. **3p**
6.	$\sin 50^\circ+\sin 10^\circ=2\sin 30^\circ\cos 20^\circ=\cos 20^\circ=\sin 70^\circ$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	Prin calcul direct. **5p**
1. b)	$\det A(a)=(a+2)(a-2)^2$ **3p** $\det A(a)=0\Rightarrow a\in\{-2,2\}$. **2p**
1. c)	$(x,y,z)=(0,4,0)$. **5p**
2. a)	$x_1x_2x_3x_4=1\Rightarrow x_i\neq 0,(\forall)\,i=\overline{1,4}$. **2p** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_1}{x_1x_2x_3x_4}=-8$. **3p**
2. b)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=16-16=0$. **2p** Cum $x=0$ nu este rădăcină a lui f, deducem că nu toate rădăcinile sunt reale. **3p**
2. c)	Cum $f\in\mathbf{Z}[X]$ singurele rădăcini întregi se află printre divizorii termenului liber. **2p** Adică ± 1. Dar $f(1)=6\neq 0$ și $f(-1)=14\neq 0$. **3p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-1=-\frac{(x-1)^2}{1+x^2}<0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$. **2p** Deducem că f este strict descrescătoare pe **R**. **3p**
1. b)	f continuă ca diferență de funcții continue pe **R**. **1p** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}-1\right)=-\infty$. $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=0\right)$. **2p** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln(1+x^2)-x)=\infty$. Orice funcție continuă pe **R** are proprietatea lui *Darboux*. Deducem $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$, adică f surjectivă. **2p**
1. c)	Asimptote verticale și orizontale, nu are. **1p** Pentru oblice $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}-1\right)=-1$. **2p** $n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)=\infty$, nu convine. **2p**
2. a)	F derivabilă și $F'(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$. **5p**
2. b)	$\mathcal{A}=\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln(x^2+x+1)\Big\|_0^1=\ln 3$. **5p**
2. c)	$\lim\limits_{x\to\infty}(F(x)-F(-x))=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{-2x+1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. **5p**

TESTUL 62

Subiectul I.

1.	$z = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i \Rightarrow \text{Re}(z) = -8,\ \text{Im}(z) = 6$. **5p**
2.	$m^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$. **5p**
3.	Împărțind prin 4^x și notând $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$, ecuația devine $6t^2 - 13t + 6 = 0$, cu soluțiile $t_1 = \frac{3}{2}$ și $t_2 = \frac{2}{3}$, de unde $x \in \{-1, 1\}$. **5p**
4.	Cazurile posibile sunt numerele $10, 11, 12, \ldots, 19, 21, 31, \ldots, 91$, adică 18 cazuri posibile $\Rightarrow$ $\Rightarrow p = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$. **5p**
5.	Fie $A(-2, -3) \in d_1$. Atunci $d(d_1, d_2) = d(A, d_2) = \frac{\lvert -4 - 6 + 1 \rvert}{\sqrt{8}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$. **5p**
6.	$\sin\frac{19\pi}{12} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{12} = -\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	Prin calcul direct. **5p**
1. b)	Se verifică prin calcul. **5p**
1. c)	$A(x) = A^{-1}(x) \Rightarrow A(x) \cdot A(x) = I_2 \Rightarrow A(2x + 4x^2) = A(0) \Rightarrow x \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$. **5p**
2. a)	$f(2) = 30, f(-2) = 22 \Rightarrow f(2) - f(-2) = 660$. **5p**
2. b)	Efectuând împărțirea, obținem câtul $X + 8$ și restul $6X - 2$. **5p**
2. c)	Expresia se mai poate scrie $E = x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1x_3(x_1 + x_3) + x_2x_3(x_2 + x_3) =$ $= x_1x_2(-7 - x_3) + x_1x_3(-7 - x_2) + x_2x_3(-7 - x_1) = -7 \cdot (-2) - 3 \cdot (2) = 8$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{x \to -2} \frac{\sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{(x+2)^3}} = +\infty$. **5p**
1. b)	$f(0) = \sqrt[3]{2}$, $f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}} \Rightarrow f'(0) = -\frac{4}{\sqrt[3]{4}} - \frac{-\sqrt[3]{2}}{2}$. $y - \sqrt[3]{2} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}x$. **5p**
1. c)	$D_d = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$. **5p**
2. a)	$f(3) = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = t\Big\rvert_2^3 + \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{t-1}{t+1}\right\rvert_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **5p**
2. b)	Pentru $x > 1$, avem: $g'(x) = \sqrt{3e^{\ln\frac{x^2-1}{3}} + 1} \cdot \left(\ln\frac{x^2-1}{3}\right)^1 = \sqrt{x^2} \cdot \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$. **5p**
2. c)	$f'(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow 2f'(x) = g'(x)$, de unde $g(x)$ și $2f(x)$ având derivatele egale diferă printr-o constantă. $2f(2) = 0$, iar $g(2) = 0$, deci $g(x) = 2f(x), (\forall) x \in (1, \infty)$. **5p**

TESTUL 63

Subiectul I.

1.	$(\sqrt{2}+3)^2 = 13+6\sqrt{2} \in (21,22) \Rightarrow [(\sqrt{2}+3)^2] = 21$. **5p**
2.	$\frac{2x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+5}{(x-1)(x+2)} \geq 0$. Cum $x^2+3x+5>0, (\forall)x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ $\Rightarrow (x-1)(x+2)>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2)\cup(1,\infty)$. **5p**
3.	Pentru $x>0$, notăm $\lg x = t \Rightarrow t^2+t-12=0 \Rightarrow t_1=3,\ t_2=-4$, de unde $x \in \{10^3, 10^{-4}\}$. **5p**
4.	Ultima cifră impară $\Rightarrow$ 123, 321, 213, 231; sunt 4 numere. **5p**
5.	$m_d = 1 \Rightarrow d' \parallel d \Leftrightarrow m_{d'} = 1,\ d': y-1=x$. **5p**
6.	$R = \frac{abc}{4S}, S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 12\sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{7\cdot 8\cdot 9}{48\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{10}$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$A^3 = O_3$. **5p**
1. b)	Fie $X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $A\cdot X = X\cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2+a_3 & a_3 & 0 \\ b_2+b_3 & b_3 & 0 \\ c_2+c_3 & c_3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\Rightarrow a_3=0, b_3=0, a_2=0, a_1=b_2=c_3, b_1=c_2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 \\ c_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix} \in M$. **5p**
1. c)	Dacă $X^2 = A$, atunci $X\cdot A = A\cdot X$ și deci $x \in M, X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$ cu $a=0$, deoarece $\det X^2 = \det A = 0 \Rightarrow \det X = 0 \Rightarrow a = 0$, de unde $X^2 \neq A$. **5p**
2. a)	$f(1)=2, f(-1)=2 \Rightarrow f(1)\cdot f(-1)=4$. **5p**
2. b)	$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2} = \frac{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \frac{1-30}{9} = -\frac{29}{9}$. **5p**
2. c)	Cum $f \in \mathbf{Z}[X]$, dacă $a \in \mathbf{Z}$ este rădăcină a lui f, atunci $a \mid -3 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \in \{-1,1,3,-3\}$. Dar $f(-1), f(1), f(3), f(-3) \neq 0 \Rightarrow f$ nu admite nicio rădăcină rațională $\Rightarrow f$ ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$f'(x) = 5 + \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{5x^2+7x+6}{x^2+x+1}$. **5p**
1. b)	$5x^2+7x+6>0$ și $x^2+x+1>0 \Rightarrow f'(x)>0, (\forall)x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ $\Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă. **5p**
1. c)	$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 5 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+x+1)}{x} = 5$. $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-5) = \infty$ nu convine. **5p**
2. a)	$\int_2^3 \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^3 - 2x\Big|_2^3 = \frac{5}{2} - 2$. **5p**
2. b)	$\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x+1}{x-2}\,dx = x\Big|_{-1}^{0} + 3\ln\lvert x-2\rvert\Big|_{-1}^{0} = 1+3\ln\frac{2}{3}$. **5p**
2. c)	$g'(x) = f(x^2)\cdot 2x = (x^4-3x^2+2)\cdot 2x$; $g'(x)=0 \Rightarrow x=0$; $x^2=1 \Rightarrow x \in \{\pm 1\}$ sau $x^2=2 \Rightarrow x \in \{\pm\sqrt{2}\}$. **5p**

TESTUL 64

Subiectul I.

1.	$z = 2 - 4i - i - 2 = -6i \Rightarrow \text{Re}(z) = 0$. **5p**
2.	$\Delta < 0$. $\Delta = m^2 + 2m + 1 - 4m^2 - 4m = -3m^2 - 2m + 1$. $\Delta_1 = 4 + 12 = 16$. $m_1 = \frac{2+4}{-6} = -1$, $m_2 = \frac{1}{3}$, $m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. **5p**
3.	$3 - 3\cos x - 2(1 - \cos^2 x) = 0$, $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, $\cos x = 1$ sau $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = 0$ sau $x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}\right\}$. **5p**
4.	$55 \cdot 2 = 110$ este cel mai mic număr căutat, $55 \cdot 18 = 990$ este cel mai mare număr căutat. $p = \frac{\text{Numărul de cazuri favorabile}}{\text{Numărul de cazuri posibile}} = \frac{17}{900}$. **5p**
5.	$d: 3x - 2 + 5 = 0 \Rightarrow m_d = \frac{3}{2}$. Condiția de perpendicularitate $m_d \cdot m = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow m = -\frac{2}{3}$. Ecuația căutată este $y = -\frac{2}{3}(x+1)$ sau $2x + 3y + 2 = 0$. **5p**
6.	$\sin 50° + \cos 50° = \sin 50° + \sin 40° = 2\sin 45° \cdot \cos 5° = \sqrt{2}\cos 5°$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+3 & m+3 & m+3 \\ 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} =$ $= (m+3)(m^2 + 2m + 1 + 2 - m - 1 - m - 1 - 1) = (m+3) \cdot m^2$. **5p**
1. b)	Pentru $m \neq -3$ și $m \neq 0$ sistemul este posibil determinat. $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \\ m^2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 + 2m + 1 + m + m^2 - m^3 - m^2 - 1 - m^2 - m = -m^3 + 2m.$ $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{m(-m^2+2)}{m^2(m+3)} = \frac{-m^2+2}{m(m+3)}$ etc. **5p**
1. c)	Pentru $m = 0$, sistemul este incompatibil. **5p**
2. a)	$f(0) = -6$. **5p**
2. b)	$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{6}{6} = 1$. **5p**
2. c)	Cum $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Z}$ sunt consecutive și $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 6$ deducem că unica posibilitate $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ și $x_3 = 3$, de unde $m = 11$. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\infty \Rightarrow x=0$ este asimptotă verticală. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ funcția nu admite asimptote orizontale. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1=m$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=0\Rightarrow y=x$ este asimptotă oblică spre $\pm\infty$. **5p**
1. b)	$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$. **5p**
1. c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm 1$. <table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$-1$</td><td>$0$</td><td>$1$</td><td>$\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>$0$</td><td>$-$</td><td>$0$</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow -2$</td><td>$\searrow -\infty$</td><td>$\infty\searrow$</td><td>$2\nearrow\infty$</td></tr></table> Deci pentru $m\in(-\infty,-2)$ ecuația $f(x)=m$ are două rădăcini reale și distincte. Pentru $m=-2$ ecuația are două rădăcini egale $x_1=x_2=-1$. Pentru $m\in(-2,2)$ ecuația nu are soluții. Pentru $m=2$ ecuația are două rădăcini egale $x_1=x_2=1$. Pentru $m\in(2,\infty)$ ecuația are două rădăcini reale și distincte. **5p**
2. a)	$\int_0^1\sqrt{\ln e^x}\,dx=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{2}{3}$. **5p**
2. b)	$\int_{-1}^1\sqrt{\ln e^{x^2}}\,dx=\int_{-1}^1|x|dx=-\int_{-1}^0 x\,dx+\int_0^1 x\,dx=-\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^0+\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. **5p**
2. c)	$V=\pi\int_1^e f^2(x)dx=\pi\int_1^e\ln x dx=\pi\left(x\ln x\,|_1^e-\int_1^e dx\right)=\pi(e-e+1)=\pi$. **5p**

TESTUL 65

Subiectul I.

1.	Progresie aritmetică cu raţia 3. $x = a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow x = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 1$. $S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} = 155 \Rightarrow \frac{(2+3n-1)n}{2} = 155 \Rightarrow 3n^2 + n - 310 = 0 \Rightarrow n = 10$ şi deci $x = 29$. **5p**
2.	$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2].x_1 + x_2 = -3$, iar $x_1x_2 = -17$. Avem: $x_1^3 + x_2^3 = -3(9 + 51) = -80$. **5p**
3.	$\sqrt[4]{1-x} + 2 = 2x \Leftrightarrow \sqrt[4]{1-x} = -2(1-x)$ din condiţia de existenţă $x = 1$ soluţie unică. **5p**
4.	Cu numerele impare $\{1,3,5,7,9\}$ se pot forma $2^5 - 1$ submulţimi, **3p** deci $p = \frac{2^5 - 1}{2^{11}}$. **2p**
5.	$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-3}{-3} = 1 = m_d$, $d: y - 2 = x - 1$, $d: -x + y - 1 = 0$. **5p**
6.	$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC32}{2AB \cdot AC} = \frac{4 + 4 + 2\sqrt{3} - 6}{4(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\hat{A}) = 60°$. $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4 + 6 - (4 + 2\sqrt{3})}{4\sqrt{6}} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} =$ $= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow m(\hat{B}) = 75°$, $m(\hat{C}) = 180° - (60° + 75°) = 45°$. **5p**

Subiectul II.

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2)(m^2 - 2m + 1) = (m+2)(m-1)^2$. **5p**
1. b)	Sistemul are soluţie unică dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow m \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$. **5p**
1. c)	Pentru $m = -2$, $\det A = 0$, deducem că rang$A = 2$ cu $\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$. $\Delta_{car} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Sistemul este incompatibil. **5p**

Subiectul III.

1. a)	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{4}{-0} = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty \Rightarrow x = 1$ asimptotă verticală. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, Deci funcţia nu admite asimptotă orizontală. $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+3}{x^2 - x} = 1$. $n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+3}{x-1} = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = x + 1$ este asimptotă oblică spre ∞. Analog spre $-\infty$. **5p**
1. b)	$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 2$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 3\}$. **5p**
1. c)	Pentru $m \in (-\infty, -2)$, $f(x) = m$ are două soluţii distincte. Pentru $m = -2$, $f(x) = -2$ are două soluţii egale. Pentru $m \in (-2, 6)$ ecuaţia $f(x) = m$ nu are soluţii. Pentru $m = 6$, ecuaţia are o rădăcină dublă. Pentru $m > 6$, ecuaţia are două rădăcini distincte. **5p**
2. a)	$\int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{e} + \frac{1}{2}$. **5p**
2. b)	$\mathcal{A} = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2e}$. **5p**
2. c)	$h'(x) = F'(x) + 3f'(x) = e^{-x^2} + 3 \cdot e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1 - 6x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$, un singur punct de extrem. **5p**

Cartea Școlară în Mileniul III

Motto: Nu uitați, matematica este poezia minții!

Materialul propus se constituie într-un ghid metodologic în conformitate cu prevederile legale în vigoare în scopul înbunătățirii calității procesului de învățământ.

Această lucrare se adresează tuturor elevilor care vor susține Examenul de Bacalaureat începând cu anul 2018. În egală măsură lucrarea poate fi utilizată de toți elevii claselor IX-XII în activitatea de zi cu zi la clasă.

Structurată, pe clase și capitole, lucrarea respectă prevederile programelor școlare în vigoare la nivelul fiecărei clase, precum și programa în vigoare a examenului de bacalaureat pentru profilele:

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică.

Filiera vocațională, profil militar MAPN, specializarea matematică-informatică.

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii.

Filiera tehnologică, toate calificările profesionale.

Legea Educației Naționale Art. 69. 5. Auxiliarele curriculare sunt constituite din ghiduri metodologice care, prin conținut sunt în conformitate cu prevederile legale în vigoare și pe care cadrele didactice le pot selecta și utiliza la clasă, în baza libertății inițiativei personale în scopul înbunătățirii calității procesului educațional.

I.S.B.N. 978-973-9352-55-0

6 422894 000548

30 LEI